DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP JUNIORZY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ I

1) Dziesięć minut temu wskazówki zegara pokrywały się. Jaki kąt tworzą obecnie?

2) W kafejce Kawosz kawa mielona sprzedawana jest na wynos w 200-gramowych opakowaniach. Podczas ferii ogłoszono promocję „20% gratis" i masę kawy w opakowaniu zwiększono o 20%. O ile procent tańsza była kawa w promocji?

3) Adam i Bartek z nudów wymyślili pewna grę. Na kartce zapisali jeden za drugim ciąg k minusów. Grając, wykonują ruchy na przemian. W każdym ruchu gracz może zmienić jeden lub dwa sąsiednie minusy na plusy. Wygrywa ten, który zmieni ostatni minus. Adam wykonuje ruch jako pierwszy. Jak powinien grać, aby wygrać?

4) Prostokąt, którego długości boków są liczbami naturalnymi, podzielono na kwadraty o boku 1. W każdy z kwadratów wpisano pewną liczbę całkowitą tak, że suma liczb w każdym wierszu była równa 1, a suma liczb w każdej kolumnie był równa 3. Czy pole tego prostokąta mogło być równe 2019?

5) Dany jest różnoramienny trójkąt ABC. Na ile sposobów można zaznaczyć w płaszczyźnie tego trójkąta czwarty punkt D tak, żeby figura złożona z punktów A, B, C i D miała oś symetrii?

6) Ania i Bartek wyszli z domu przy Rynku i zaczęli spacerować wokół Ratusza. Spacerowali tą samą drogą, ale w przeciwnych kierunkach. Gdy minęły 4 minuty, spotkali się po raz pierwszy i wówczas Ania postanowiła iść dwa razy wolniej. Po drugim spotkaniu, które nastąpiło po kolejnych 6 minutach, Bartek zdecydował się iść trzy razy wolniej. Po ilu minutach dojdzie do następnego spotkania?

7) Mamy liczbę trzycyfrową n. Tworzymy nową liczbę trzycyfrową m, zastępując każdą cyfrę liczby n cyfrą dopełniającą ją do dziewiątki. Następnie piszemy te liczby jedna za drugą, zaczynając od m. Powstaje liczba sześciocyfrowa. Wykaż, że dzieli się ona przez 37.

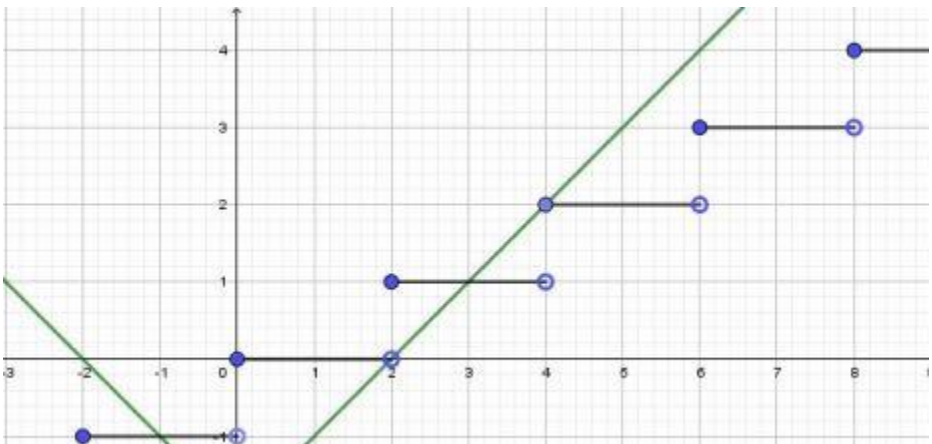
8) Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x. Rozwiąż równanie $|x|-2 = [0,5x]$.

9) Na ile sposobów można wybrać 3 wierzchołki sześcianu, aby były one wierzchołkami trójkąta prostokątnego?

10) Pewien wielokąt wypukły przecięto wzdłuż prostej. Okazało się, że liczby wierzchołków otrzymanych części oraz początkowego wielokąta (wzięte w tej kolejności) to trzy kolejne liczby naturalne. Co to był za wielokąt?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP JUNIORZY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W ciągu 10 minut duża wskazówka obraca się o $^1/_6$ kąta pełnego, czyli o 60°. W ciągu 60 minut mała wskazówka obraca się o $^1/_{12}$ kąta pełnego, czyli o 30°, zatem w ciągu 10 minut obraca się o $^1/_6 \cdot 30° = 5°$. Zatem kąt między wskazówkami będzie miał miarę 60–5 = 55 stopni.
2. Niech x oznacza wyjściowa cenę paczki kawy. Wówczas $^x/_{200}$ to wyjściowa cena grama kawy, a $^x/_{240}$ to nowa cena grama kawy. Nowa cena stanowi ($^x/_{240}$: $^x/_{200}$)= 0,8(3) starej, zatem kawa w promocji jest o $100 - 88^1/_3 = 16^2/_3$ procent tańsza.
3. Jeśli k jest nieparzyste, to w pierwszym ruchu Adam powinien skreślić środkowy minus, a jeśli jest parzyste, to dwa środkowe minusy. Każdy następny ruch Adam powinien wykonywać symetrycznie do ruchu przeciwnika względem środka ciągu minusów. Jeśli Bartek mógł wykonać ruch, to Adam ma również taką możliwość, więc nigdy nie przegra.
4. Niech prostokąt ma m wierszy i n kolumn. Suma wszystkich wpisanych liczb, licząc je wierszami, wynosi m, a licząc kolumnami $3n$. Zatem $m = 3n$ i pole prostokąta wynosi $mn = 3n^2$. Jednak równanie $3n^2 = 2019$ nie ma pierwiastków naturalnych.
5. Jeśli zbiór 4-punktowy ma mieć os symetrii, musi ona przechodzić przez dwa z tych punktów (wtedy pozostałe dwa punkty leżą względem niej symetrycznie), albo nie przechodzić przez żaden z tych punktów (wtedy punkty parami leżą względem niej symetrycznie). W każdym innym przypadku zbiór musi składać się z 5 punktów (na osi leży 1 lub 3 z nich), albo wszystkie punkty są współliniowe (na osi leżą 4 z nich), ale wtedy A, B, C nie tworzą trójkąta. Są trzy możliwości poprowadzenia osi symetrii przez dwa punkty (to proste zawierające kolejne boki trójkąta) – trzeci wierzchołek nie leży na żadnej z nich, więc odbija się w każdej symetrycznie, dając możliwy punkt D – oraz trzy możliwości poprowadzenia osi symetrii, względem której każda para wierzchołków będzie juz symetryczna (to symetralne boków trójkąta) – trzeci wierzchołek nie leży na żadnej z nich, bo trójkąt nie jest równoramienny, więc odbija się w każdej symetrycznie, dając możliwy punkt D. Jest zatem 6 możliwych położeń D, ale tylko wtedy, gdy trójkąt ABC nie jest prostokątny. Jeśli jest, możliwych położeń D jest tylko 5, gdyż te uzyskane w symetrii względem symetralnych przyprostokątnych, pokrywają się. Za niezauważenie tego przypadku odejmujemy 5 pkt.
6. Oznaczmy przez s długość drogi podczas pierwszego okrążenia, a przez v_a i v_b – szybkości dzieci. Z warunków zadania (po pierwszym i drugim spotkaniu) otrzymujemy równania $4v_a + 4v_b = s$ oraz $6{\cdot}1/2v_a + 6v_b = s$, skąd $v_a = 2v_b$. Oznaczmy przez t czas, jaki upłynie do następnego spotkania. Wówczas $4(v_a+v_b) = t(^1/_2v_a + 1/3v_b)$. Podstawiając $v_a=2v_b$, otrzymujemy $12v_b = t(v_b+^1/_3v_b)$, skąd $t = 9$. Do następnego spotkania dojdzie po 9 minutach.
7. Niech $n = 100a+10b+c$. Wtedy finalna liczba wynosi $10^3(100a+10b+c) + 100(9–a) + 10(9–b) + 9–c = 100a(10^3–1) + 10b(10^3–1) + c\cdot(10^3–1) + 999 = 999\cdot(100a+10b+c+1) = 37\cdot27\cdot(100a+10b+1)$, więc jest podzielna przez 37.
8. Rozwiązujemy równanie graficznie, wykonując wykres prawej i lewej strony. Wartości obu stron są równe dla argumentów ze zbioru {-1, 3, 4}.



9. Trójkąty prostokątne rozpięte na wierzchołkach sześcianu powstają: a) równoramienne – 4 na każdej ze ścian, czyli razem jest ich 6·4=24 oraz b) nierównoramienne (zawierające krawędź i przekątną sześcianu) – 2 przy każdej krawędzi, czyli razem jest ich $2\cdot12 = 24$. Wszystkich jest więc 48.
10. Niech n – liczba wierzchołków wielokąta, a n–1 i n–2 to liczby wierzchołków powstałych części. Jeśli prosta cięcia przechodziła przez dwa wierzchołki, to $(n–2) + (n–1) = n+2$, skąd n=5. Jeśli prosta cięcia przechodzi przez jeden wierzchołek i przecina jeden z boków, to $(n–2) + (n–1) = n+3$, skąd n=6. Jeśli prosta cięcia nie przechodzi przez wierzchołki, to $(n–2) + (n–1) = n+4$, skąd n=7. Za pominięcie jednego przypadku przyznajemy 4 pkty, za dwóch 2 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

SP JUNIORZY – RUNDA POŁFINAŁOWA

MECZ II

1. Mama przygotowuje sos vinegret. Odlała szklankę 10% roztworu octu i odparowała z niej wodę tak, że objętość roztworu zmalała o połowę. Jakie jest stężenie nowego roztworu?

2. Janek zmierzył dokładnie wszystkie kąty pewnego trójkąta, zaokrąglił ich miary do pełnych stopni i dodał. Jaki wynik otrzymał?

3. Kąt zewnętrzny wielokąta jest kątem przyległym do kąta wewnętrznego. Ile wynosi kąt zewnętrzny n-kąta foremnego (czyli wielokąta o równych bokach i równych kątach)?

4. Budujemy piramidę z małych kulek. Najpierw układamy w podstawie trójkąt równoboczny o boku z 5 kulek. Następnie w każde zagłębienie pomiędzy kulkami wkładamy nową kulkę i tak powstaje drugi poziom. Podobnie następne, aż położymy ostatnią kulkę na szczyt. Z ilu kul składa się ta piramida?

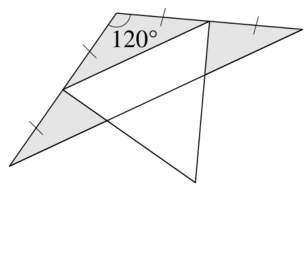
5. Krawędź sześcianu zmierzono z dokładnością do 1%. Z jaką procentową dokładnością znamy objętość tego sześcianu?

6. Basia ma w portfelu 11 złotówek oraz trochę monet 50-groszowych i 20-groszowych. Średnia wartości jej monet wynosi 52 grosze. Basia policzyła swoje monety w portfelu i wyszło jej 40. Adaś też je policzył i twierdzi, że musiała się pomylić. Kto ma rację?

7. W trójkącie ABC o polu 8 poprowadzono połączono środki boków AC i BC odcinkiem DE. Oblicz pole trójkąta DEA.

8. Na szachownicy 8×8 postawiono 6 pionków na białych polach i 7 pionków na polach czarnych. Ruch gracza polega na jednoczesnym przestawieniu czterech dowolnych pionków, każdego na dowolne sąsiednie pole poziomo lub pionowo. Czy można tak wykonywać ruchy, by po pewnej ich liczbie na białych polach stało 7 pionków, a na czarnych 6?

9. Suma kwadratów trzech kolejnych naturalnych liczb nieparzystych jest liczbą czterocyfrową o jednakowych cyfrach. Wyznacz wszystkie trójki takich liczb nieparzystych.



10. Nałożono jeden na drugi dwa trójkąty: równoramienny o kącie 120° i równoboczny o polu 36, którego dwa wierzchołki leżą na środkach ramion drugiego trójkąta. Oblicz zacieniowane pole.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP JUNIORZY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na początku ocet stanowił $^{1}/_{10}$ część objętości roztworu. Objętość ta zmalała dwukrotnie, ale ilość octu się nie zmieniła, wiec stanowi ona teraz $^{1}/_{5}$ część objętości roztworu, co oznacza, że jest to roztwór 20-procentowy. Za bardziej skomplikowane rachunki odjąć 1 lub 2 pkt.

2. Niech dokładne miary kątów wynoszą p,a, q,b i r,c, gdzie p, q i r są częściami całkowitymi, a a, b, c częściami ułamkowymi liczb. Ponieważ suma miar kątów jest całkowita, $a+b+c$ jest całkowite i nie przekracza 3. Mogą więc zajść następujące przypadki: a) $a+b+c = 0$, wówczas $p+q+r = 180$; b) $a+b+c = 1$, wówczas $p+q+r = 179$; c) $a+b+c = 2$, wówczas $p+q+r = 178$. W a) nie ma zaokrągleń i uzyskujemy wynik **180**. W b) może nie być zaokrągleń, np. p,4, q,4, r,2 i wynik wyniesie **179**, może być jedno, np. p,5, q,4, r,1 i wynik wyniesie **180** lub mogą być dwa, np. p,5, q,5, r,0 i wynik wyniesie **181**. Trzech być nie może, bo 0,5+0,5+0,5>1. W c) mogą być dwa zaokrąglenia, np. p,9, q,9, r,2 i wynik wyniesie **180**, albo trzy zaokrąglenia, np. p,7, q,7, r,6 i wynik wyniesie **181**. Mniej niż dwóch zaokrągleń być nie może, bo 0,5+0,4+0,4<2. Zatem możliwe wyniki Janka to 179, 180 lub 181. Za odpowiedz bez uzasadnienia, że innych wyników być nie może, przyznajemy 5 pkt. Za pominięcie któregoś przypadku, przyznajemy 0.

3. Prowadząc przekątne z jednego wierzchołka n-kąta, dzielimy go na $n–2$ trójkąty, każdy z sumą kątów wewnętrznych 180°. Kąty tych trójkątów dają sumę kątów wewnętrznych n-kąta i wynosi ona $(n–2)\cdot180°$. Wszystkie kąty wewnętrzne są równe, czyli każdy z nich ma miarę $^{1}/_{n}\cdot(n–2)\cdot180°$. Kąt zewnętrzny dopełnia wewnętrzny do 180°, czyli wynosi $180°–{}^{1}/_{n}\cdot(n–2)\cdot180° = 180°(1–{}^{n–2}/_{n}) = 180°\cdot{}^{2}/_{n} = 360°/n$.

4. Aby ułożyć z kulek trójkąt równoboczny o boku z 5 kulek, układamy kolejno w rzędach od 1 do 5 kulek, czyli razem 1+2+3+4+5=15 kulek. Aby ułożyć piramidę, w kolejnych warstwach układamy trójkąty o boku z 4, 3 i 2 kulek i ostatnią kulkę na szczycie. Zużyjemy na to (1+…+5) + (1+…+4) + (1+2+3) + (1+2) +1 = 15+10+6+3+1 = 35 kulek.

5. Wiadomo, że krawędź ma długość $a\pm0{,}01a$. Wówczas objętość dokładna sześcianu wynosi a^3, a wyliczona z pomiaru $(a\pm0{,}01a)^3 = a^3\pm3a^2\cdot0{,}01a+3a\cdot0{,}0001a^2\pm0{,}000001a^3 = a^3\pm0{,}03a^3+0{,}0003a^3\pm0{,}000001a^3 \le 1{,}030303a^3$, co daje błąd nie większy niż 3,0303%. Uczeń może wykonać mnożenie wtrazeń algebraicznych. Nie wymagamy znajomości wzoru skróconego mnożenia.

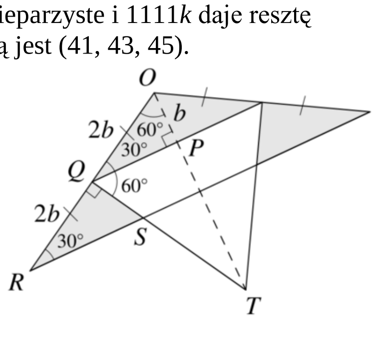
6. Niech p i d to liczby monet 50- i 20-groszowych odpowiednio. Liczba monet Basi to $11+p+d$. Ich wartość wynosi zarówno $(11+p+d)\cdot52$ jak i $1100+50p+20d$. Po przyrównaniu tych wielkości otrzymujemy $32p+2d = 528$, czyli $16p+d = 264$ lub inaczej $11+p+d = 275–15p = 270–15p+5 = 15(18–p)+5$. Widać, że liczba monet w portfelu daje resztę 5 z dzielenia przez 15, a 40 nie jest taką liczbą. Basia źle policzyła monety.

7. Odcinek DE jest równoległy do AB i dwa razy krótszy (z twierdzenia o linii środkowej trójkąta). Trójkąty ABC i DEC są podobne w skali 2, zatem stosunek ich pól wynosi 4. Stąd pole DEC wynosi 2, a pole $DEBA$ wynosi 6. Jeśli pole trójkąta DEA wynosi x, to pole ABE wynosi $2x$, bo te trójkąty mają tę samą wysokość i jeden ma dwa razy większą podstawę. Stąd $2x + x = 6$, czyli $x=2$.

8. Każdy z pionków przestawianych w danym ruchu zmienia kolor pola, na którym stoi. Załóżmy, że w pewnym momencie mamy b pionków na polach białych i c na czarnych, i wykonujemy ruch, w którym przestawiamy x pionków białych i $4–x$ czarnych, gdzie $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Wtedy na polach białych znajdzie się $b–x+(4–x) = b+4–2x$ pionków, a na polach czarnych $c–(4–x)+x = c–4+ 2x$ pionków. Wynika stąd, że w każdym ruchu liczby pionków na polach białych i czarnych zachowują swoją parzystość (zmieniają się o liczbę parzystą). Zatem nigdy nie dojdziemy do sytuacji, w której parzystość ta się zamieni i będzie 7 pionków na polach białych i 6 na czarnych.

9. Niech $n–2$, n i $n+2$ to trzy kolejne liczby nieparzyste. Ich kwadraty i suma tych kwadratów też są nieparzyste. Wiemy, że $(n–2)^2+ n^2 + (n+2)^2 = 3n^2+8$ jest czterocyfrowa o jednakowych cyfrach, czyli równa $1111k$, gdzie k jest jednocyfrowe. Liczba $3n^2 = 1111k–8$ jest nieparzysta i podzielna przez 3, czyli k jest nieparzyste i $1111k$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3, a to jest spełnione tylko dla $k= 5$. Wówczas $n = 43$ i jedyną trójką jest (41, 43, 45).

10. OT jest osią symetrii całej figury. Zacieniowane pole składa się z czterech trójkątów prostokątnych, z których każdy jest połową trójkąta równobocznego, ale nie są to trójkąty przystające (za ten błąd odejmujemy 6 pkt). Niech OP ma długość b, wtedy $|OQ| =2b$ i $|QP| = \sqrt{3}b$. Trójkąty QSR i OPQ są podobne w skali $|QR|:|QP| = {}^{2b}/_{\sqrt{3}b} = 2/\sqrt{3}$, więc $|QS| = {}^{2}/_{\sqrt{3}}|OP| = {}^{2b}/_{\sqrt{3}}$. Zacieniowane pole wynosi więc $2P_{OPQ}+2P_{QSR} = b\cdot\sqrt{3}b + {}^{2b}/_{\sqrt{3}}\cdot2b = 7b^2/\sqrt{3}$. Trzeba jeszcze wyliczyć b. Trójkąt QPT też jest połową równobocznego i $|PT| = \sqrt{3}|QP| = 3b$. Jego pole to $|QP|\cdot|PT| = \sqrt{3}b\cdot3b = 3\sqrt{3}b^2 = 36$, czyli $b^2/\sqrt{3} = 4$, więc zacieniowane pole wynosi $7\cdot4 = 28$.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

SP JUNIORZY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1. Oblicz pole figury, którą tworzą wszystkie punkty spełniające układ nierówności: $0 \le y \le 3–|3x|$.

2. Podczas elektrolizy ilość materii wydzielającej się na elektrodzie jest proporcjonalna do natężenia prądu, natężenie prądu jest proporcjonalne do przewodności elektrolitu, przewodność jest proporcjonalna do koncentracji elektrolitu, a koncentracja przy danej ilości materii jest odwrotnie proporcjonalna do objętości rozczynnika. Jak wyraża się zależność pomiędzy ilością materii wydzielanej na elektrodzie a objętością rozczynnika?

3. Janek gra na ekranie smartfona w *footballgame*. Z punktu $P = (0, 0)$ strzela wzdłuż linii o równaniu $y = a \cdot x$ do 'bramki' rozpiętej na ekranie między słupkami umieszczonymi w punktach $S = (8, 4)$ i $T = (10, 4)$. Dla jakiego a odda celny strzał (nie dotykający słupka)?

4. Dwie brygady kładą kabel na pustyni w kierunku N-S. O 6.00 wyruszają z obozowiska. Pierwsza jedzie jaguarem z prędkością [18, 24] km/h, a druga – gepardem z prędkością [36, -16] km/h. O 6:30 brygada z geparda przerywa podróż i zaczyna kłaść kabel w kierunku północnym. Załoga jaguara jedzie dalej ze swoją prędkością, aż znajdzie się dokładnie na północ od poprzedniej, i wtedy zaczyna pacę. Każda ekipa kładzie średnio 800 m kabla na godzinę. Jaka odległość dzieli brygady w porze lunchu o 11.30?

5. Znajdź takie trzy kolejne liczby naturalne, których suma kwadratów dzieli się przez trzy.

6. Wewnątrz n-kąta wypukłego (n>4) dane są dwa punkty. Wykaż, że spośród wierzchołków wielokąta da się wybrać cztery tak, by otrzymany czworokąt zawierał te punkty w swoim wnętrzu.

7. Dla „długich" liczb cechę podzielności przez 9 można stosować wielokrotnie, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka jest najmniejsza liczba, dla której potrzebne są cztery powtórzenia?

8. Ile jest różnych dzielników liczby naturalnej n?

9. Ile przekątnych 20-kąta foremnego jest krótszych od promienia okręgu opisanego na tym wielokącie?

10. Nie wykonując żadnych rachunków na liczbach, podaj wartość funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$ w punkcie 2019 z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP JUNIORZY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Opisana figura to trójkąt równoramienny, prostokątny o podstawie długości 2 i wysokości 3. Jego pole wynosi 3.

2. Zależność jest odwrotnie proporcjonalna (ilość materii = const/objętość rozczynnika, gdzie const jest iloczynem wszystkich współczynników proporcjonalności – prostej i odwrotnej).

3. Wszystkie proste imitujące celny strzał zawierają się między skrajnymi prostymi przechodzącymi przez słupki. Dla słupka S mamy 4=8a, czyli a=0,5, a dla słupka T mamy 4=10a, czyli a=0,4. Zatem $a \in (0{,}4,\ 0{,}5)$. Za domknięcie przedziału odejmujemy 3 pkt.

4. Umieśćmy początek układu współrzędnych w miejscu obozowiska. Po 30 min brygada z geparda przemieści się o wektor [18, -8], więc znajdzie się w punkcie o współrzędnych (18, -8) i tam zacznie pracę. Brygada z jaguara znajdzie się na północ od nich po godzinie jazdy, czyli o 7. Będzie wtedy w punkcie (18, 24) i tam zacznie pracę. O tej porze pierwsza brygada położy już 400 m kabla i będzie w odległości 31 km i 600m. Do przerwy pozostaną 4,5 godziny. W tym czasie obie brygady położą jeszcze $4{,}5 \cdot 1600 = 7200$ metrów kabla i o tyle bliżej będą o 11:30, czyli w odległości 24 km i 400 m.

5. Rozważmy sumę kwadratów liczb n, n+1 i n+2. Wynosi ona $n^2 + n^2+2n+1 + n^2+4n+4 = 3n^2+6n+5$ (uczeń nie musi znać wzorów skróconego mnożenia, może wykonać mnożenie dwóch nawiasów. Otrzymane wyrażenie zawsze daje resztę 2 z dzielenia przez 3, nie można więc podać liczb o opisanej własności.

6. Niech prosta przechodząca przez wybrane punkty przecina boki AB i CD wielokąta. Wówczas A, B, C i D są szukanymi wierzchołkami. Jeśli prosta przecina bok AB i przechodzi przez wierzchołek C, to do A, B, C dodajemy dowolny wierzchołek jako D. Jeśli prosta przechodzi przez wierzchołki A i B, to nie są one kolejne i wtedy do A i B dodajemy dowolny wierzchołek leżący między A i B jako C oraz dowolny leżący między B i A (idąc po obwodzie w tym samym kierunku, co poprzednio) jako D.

7. Dla liczb 1-18 wystarczy jednokrotne zastosowanie cechy podzielności (suma cyfr jest jednocyfrowa), ale już dla liczby 19 potrzebne są dwa powtórzenia. Z kolei najmniejszą liczbą, która ma sumę cyfr 19 jest liczba 199 i dla niej potrzeba trzech powtórzeń $199 \to 19 \to 10 \to 1$. Z kolei najmniejszą liczbą, która daje sumę cyfr 199 jest liczba 1999…999 (w zapisie są 22 dziewiątki). Mniejsze liczby mają sumę cyfr co najwyżej $22 \cdot 9 = 198$.

8. Rozłóżmy n na czynniki pierwsze. Niech w tym rozkładzie występuje k różnych liczb. Ustawmy je w porządku rosnącym na k kolejnych miejscach. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oznaczają krotności poszczególnych czynników w tym rozkładzie. Dowolny dzielnik liczby n utworzymy, jeśli na każdym z k miejsc ustawimy odpowiadający temu miejscu czynnik wybrany w jednej z możliwych potęg od zerowej do najwyższej możliwej. Wobec tego czynnik na I miejscu możemy wybrać na a_1+1 sposobów (od zerowej potęgi do a1-szej), drugi na a_2+1 sposobów itd. Każde miejsce obsadzamy niezależnie od pozostałych zatem stosujemy regułę mnożenia i wszystkich możliwych dzielników n jest $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$.

9. Wierzchołki 20-kąta foremnego leżą na okręgu co 18°. Cięciwa poprowadzona z wierzchołka wielokąta, na której oparty jest kąt środkowy 60° ma długość taką, jak promień okręgu opisanego. Cięciwy odpowiadające mniejszym kątom są krótsze, a większym – dłuższe od promienia. Zatem z każdego wierzchołka wielokąta można poprowadzić po 2 takie przekątne w prawo i w lewo (oparte są na nich kąty $2\cdot18 = 36°$ i $3\cdot18 = 54°$). Takich przekątnych jest zatem $20\cdot4$, ale ponieważ przekątna łączy 2 wierzchołki, jest tu liczona dwukrotnie, zatem odpowiedź to $10\cdot4=40$.

10. Mamy $f(x) = \dfrac{(x^2-6x+9)+1}{x-3} = \dfrac{(x^2-2\cdot3x+3^2)}{x-3} + \dfrac{1}{x-3} = x-3+\dfrac{1}{x-3}$, stąd $f(2019) = 2016+1/2016 \approx 2016$ (pierwsza cyfra znacząca pojawia się na 4 miejscu po przecinku i jest mniejsza niż 5, bo 2016 > 2000 i 1:2000 = 0,005). Za brak argumentu o zaokrągleniu odejmujemy 3 pkt.