DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1) Udowodnij, że dla n naturalnych liczba $49^n\cdot(49^n+1)+1$ jest złożona.

2) Czy dowolny trójkąt można podzielić na trójkąty równoramienne?

3) Jaka jest największa trzycyfrowa liczba pierwsza, której wszystkie cyfry są różne i też są pierwsze?

4) Basia i Kasia rozegrały 9 partii szachów, zmieniając w każdej rundzie kolor figur. Żadna gra nie skończyła się remisem. Dokładnie 5 partii wygrała zawodniczka grająca pionkami czarnymi, a Kasia wygrała dokładnie 6 partii. Jakim kolorem figur Kasia rozegrała pierwszą partię?

5) Ile razy funkcja $f(x) = x^{2014} + {}^{2014}/_{x}$ przyjmuje swoją najmniejszą wartość dla $x>0$?

6) Znajdź trójkąt, którego boki mają długości większe od 2 cm, a mimo to jego pole jest mniejsze od pola trójkąta równobocznego o boku długości 1 cm.

7) Oblicz objętość i pole powierzchni ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 1 cm.

8) Czy istnieją liczby całkowite dodatnie x, y, z, t spełniające równanie $x^2+y^2 = 3(z^2+t^2)$?

9) Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Ciąg a_n jest określony rekurencyjnie: $a_1=1$, $a_{n+1} = a_n+s(a_n)$. Czy w tym ciągu występuje liczba 12015?

10) Czy kwadrat można podzielić na 2015 kwadratów?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

1) Jeśli jest dany trójkąt, to środki jego boków są wyznaczone jednoznacznie. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe

2) Podaj najmniejszą i największą niezerową wielokrotność 12, której każda cyfra jest inna.

3) Czy istnieje taki ułamek ${}^{m}/_{n}$, gdzie m i n są naturalne i $m \neq n$, że wszystkie ułamki postaci $\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$ są skracalne?

4) Jacek położył na stole 100 fistaszków. Wraz ze swoim tresowanym chomikiem Archimedesem grają w następującą grę: po kolei każdy z nich zjada tyle orzeszków, ile chce, pod warunkiem, że w swoim ruchu każdy zjada co najmniej jeden lecz nigdy więcej niż połowę orzeszków, które są aktualnie na kupce. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Czy Archimedes może sprawić, żeby Jacek z nim przegrał?

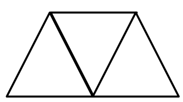
5) Czy liczba $1+2^{3456789}$ jest pierwsza?

6) Wyznacz wartość sumy 3+33+333+….+ 333…333, gdzie w ostatnim składniku jest 30012015 trójek.

7) Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych m i n, których różnica kwadratów jest sześcianem liczby pierwszej.

8) Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie z niewiadomą x: $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\left[\frac{\pi}{3x}\right]\right)=\frac{1}{2}$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

9) Dana jest plansza w kształcie trójkąta równobocznego o boku 2016. Podzielono ją na trójkąty równoboczne o boku 1. Ile maksymalnie klocków w kształcie trapezu równoramiennego złożonego z 3 trójkątów o boku 1 (patrz rysunek) można na niej ułożyć, aby klocki nie zachodziły na siebie nawzajem?



10) Niech $s(n)$ oznacza naprzemienną sumę cyfr liczby n (licząc od prawej, cyfry z miejsc nieparzystych dodajemy, a z parzystych – odejmujemy). Ciąg a_n jest określony rekurencyjnie: $a_1=1$, $a_{n+1} = a_n+s(a_n)$. Czy w tym ciągu występuje liczba 30012015?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1) Sześć kul bilardowych ponumerowanych liczbami od 1 do 6 ułożono w trójkąt równoboczny. Janek zauważył, że poza bilami w podstawie trójkąta każda inna spełnia warunek, że jej numer jest różnicą numerów bil leżących bezpośrednio pod nią. Jaka bila była w wierzchołku trójkąta?

2) Rozwiąż równanie $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+3}}=2015$.

3) Pewna wyspa ma kształt trójkąta. Który jej punkt jest położony najdalej od morza?

4) Wykaż, że różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb nieparzystych nie może być kwadratem.

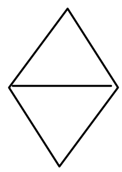
5) W trójkącie *ABC* obieramy dowolnie punkt wewnętrzny *W* i łączymy go odcinkami z wierzchołkami *A* i *B*. Pokaż, ze kat *AWB* jest większy od *ACB*.

6) Ile przekątnych ma dwunastościan foremny?

7) Co jest większe: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ czy $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$?

8) Czy trójkąt leżący całkowicie we wnętrzu innego trójkąta musi mieć mniejszy obwód od tego zewnętrznego trójkąta?

9) Dana jest plansza w kształcie trójkąta równobocznego o boku 2016. Podzielono ją na trójkąty równoboczne o boku 1. Ile maksymalnie klocków w kształcie rombu o boku 1 (patrz rysunek) można na niej ułożyć, aby nie zachodziły na siebie nawzajem?



10) Na rysunku poniżej przedstawiono trapez równoramienny, w którym $\alpha = 83\frac{1}{3}^\circ$, oraz sposób, w jaki z wielu takich kafelków można zbudować gwiazdę. Z ilu trapezów składa się ta gwiazda?