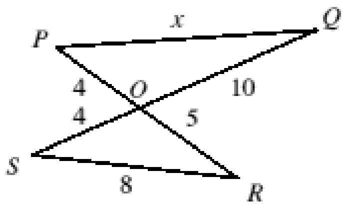
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

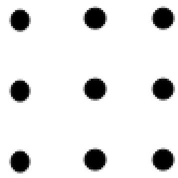
1) Z poniższych zdań wybierz jak najliczniejszy zestaw zdań niesprzecznych
   a) Jestem mądry.
   b) Mam pecha.
   c) Mam szczęście, ale jestem głupi.
   d) Jeśli jestem mądry, to mam pecha.
   e) Jestem mądry wtedy i tylko wtedy, gdy mam szczęście.
   f) Albo jestem mądry, albo mam szczęście, ale nie jedno i drugie.



2) Czy liczba $\frac{2}{3-\sqrt{5}}+\frac{2}{3+\sqrt{5}}$ jest wymierna?

3) Odcinki *PR* i *QS* przecinają się w punkcie *O* jak na rysunku. Ile wynosi *x*?

4) Jeśli mikołajki były w danym roku środą, to w jaki dzień tygodnia mogą wypaść 5 lat później?



5) Jakiej postaci są wszystkie możliwe liczby, które mają dokładnie 8 dzielników?

6) Ile różnych trójkątów można uzyskać, wybierając trzy punkty spośród dziewięciu z rysunku?

7) W kwadracie *PQRS* punkty *T* i *U* są odpowiednio środkami boków *QR* i *RS*. Przekątna *QS* przecina odcinki *PT* i *PU* odpowiednio w punktach *W* i *V*. Jaką częścią pola kwadratu jest pole pięciokąta *RTWVU*?

8) Stosunek dwóch liczb dodatnich jest taki sam jak stosunek ich sumy do ich różnicy. Jaki to stosunek?

9) Tarcza strzelnicza powstała przez naklejenie *n* współśrodkowych kolorowych kół. Jakie powinny być średnice tych kół, z których największe ma promień *x*, aby prawdopodobieństwo trafienia każdego koloru było takie samo?

10) Na uroczystym noworocznym obiedzie u króla Midasa było 666 gości, którzy zasiedli za okrągłym stołem. Nazwijmy osoby siedzące obok - sąsiadami, siedzące w odstępie jednej osoby - sąsiadami drugiego rzędu itd. Król Midas zauważył, że niektórzy jego goście byli łysi oraz że każdy łysy gość miał dokładnie jednego sąsiada II rzędu i dokładnie jednego sąsiada IV rzędu, którzy też byli łysi. Ilu łysych było na obiedzie?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA- MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W zestawie są aż cztery zdania stanowiące układ niesprzeczny: ABDF

2. Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika, np. będącego iloczynem mianowników $(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5}) = 4$. Wówczas licznik pierwszego jest równy $6+2\sqrt{5}$, a drugiego $6-2\sqrt{5}$. Suma tych liczb to 12, zatem wynikiem jest 12/4=3.

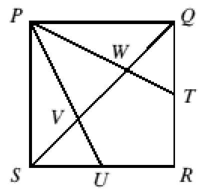
3. Kąty *POQ* i *SOR* są przystające jako kąty wierzchołkowe. Oznaczmy ich miarę przez α. Z twierdzenia kosinusów dla trójkąta *SOR* mamy $8^2 = 4^2+5^2-40\cos\alpha$, skąd $40\cos\alpha = -23$. Z twierdzenia kosinusów dla trójkąta *POQ* mamy $x^2 = 4^2+10^2-80\cos\alpha$. Po podstawieniu mamy $x^2 = 162$, czyli $x = 9\sqrt{2}$.

4. Rok to 52 pełne tygodnie i jeden lub dwa dni (1 w latach zwykłych i 2 – w przestępnych). W ciągu pięciu lat może zdarzyć się zero lat przestępnych (np. w latach 2098-2099-2100-2101-2102), jeden rok przestępny (np. w latach 2014-2015-2016-2017-2018) lub dwa lata przestępne (np. w latach 2012-2013-2014-2015-2016). Zatem pięć lat to 260 tygodni i 5, 6 lub 7 dni. Zatem mikołajki mogą się przesunąć o 5 lub 6 dni tygodnia albo pozostać w tym samym dniu. Czyli są możliwe trzy dni tygodnia: poniedziałek, wtorek lub środa. Za pominięcie każdej odejmujemy 4 pkt.

5. Liczby o dokładnie 8 dzielnikach mogą mieć jedną z postaci: p^7, pg^3 lub pqr, gdzie p, q i r to różne liczby pierwsze. Za pominięcie każdej odejmujemy 4 pkt.

6. Wszystkich możliwych wyborów trzech punktów jest $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$ = 84, ale musimy odjąć trójki współliniowe, których jest 8 (3 rzędy, 3 kolumny i 2 przekątne). Otrzymujemy 84–8 = 76 trójkątów.

7. Pięciokąt pozostaje z połowy kwadratu po usunięciu trójkątów *SUV* i *WQT*, symetrycznych względem przekątnej *PR*, więc przystających. Oznaczmy przez *O* środek kwadratu. W trójkącie *PSR* odcinki *PU* i *SO* są środkowymi, a *V* ich punktem przecięcia. Zatem *V* dzieli *PU* w stosunku 2:1, a jego rzut poziomy na *PS* (czyli wysokość trójkąta *SUV* popuszczona na *SU*) w tym samym stosunku dzieli *PS*. Pole trójkąta *SUV* wynosi zatem $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}SR\cdot\frac{1}{3}PS$, a to jest $\frac{1}{12}$ pola kwadratu. Zatem pięciokąt to $\frac{1}{2}-\frac{2}{12} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ pola kwadratu.



8. Weźmy liczby dodatnie $x>y$ takie, że $x:y = (x+y):(x-y)$. Mamy równoważnie $\frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}$. Oznaczmy szukany stosunek przez q. Mamy $q = \frac{q+1}{q-1}$. Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe $q^2-2q-1=0$, skąd $(q-1)^2=2$ i dalej $q = 1\pm\sqrt{2}$. Z założenia o dodatniości x i y jedyne rozwiązanie to $q=1+\sqrt{2}$, chodzi więc o stosunek $(1+\sqrt{2}) : 1$. Za podanie odpowiedzi w postali liczby odejmujemy 1 pkt, za uwzględnienie obu pierwiastków odejmujemy ponadto 4 pkt.

9. Prawdopodobieństwo trafienia w każdą część tarczy powinno wynosić $\frac{1}{n}$, bo tyle jest kół. Najmniejsze koło powinno więc mieć pole stanowiące $\frac{1}{n}$ tarczy, czyli $\frac{x^2\pi}{n}$, zatem promień $\frac{x}{\sqrt{n}}$ i średnicę $\frac{2x}{\sqrt{n}}$. Pole pierścienia to różnica pól sąsiednich kół, czyli $P = \frac{(d_{i+1}^2-d_i^2)\pi}{4}$, gdzie d_i to kolejne średnice. Zatem $d_{i+1} = \sqrt{d_i^2+\frac{4P}{\pi}}$. Podstawiając za P $\frac{1}{n}$ zewnętrznego koła, czyli $\frac{x^2\pi}{n}$, dostajemy $d_{i+1} = \sqrt{d_i^2+\frac{x^2}{n}}$. Zaczynając od $d_1 = \frac{2x}{\sqrt{n}}$, ostatecznie otrzymujemy $d_i = 2\sqrt{\frac{ix^2}{n}}$. Za pozostawienie odpowiedzi w postaci rekurencyjnej (wzór na d_{i+1}) odejmujemy 3 pkt.

10. Niech *Ł* oznacza osobę łysą, a *O* owłosioną. Warunki zadania dotyczą krzeseł tej samej parzystości, możemy zatem osobno rozpatrywać np. krzesła nieparzyste. Jeśli siedzi tam osoba łysa to ma dokładnie jednego łysego sąsiada I i II rzędu. Stąd otrzymujemy jeden możliwy układ na krzesłach nieparzystych OŁŁOŁŁ… Analogicznie może być na krzesłach parzystych, chyba że na nich nie ma żadnego łysego, czyli jest układ OOOOOO… Scalając teraz dwa układy krzeseł parzystych i nieparzystych otrzymujemy całościowy układ OŁŁOŁŁ… (ze scalenia OŁŁOŁŁ z OŁŁOŁŁ…) lub układ ŁOŁOOOŁOŁOOO (ze scalenia OŁŁOŁŁ… z OOOOO…). W pierwszym przypadku łysi stanowią 2/3 gości, a w drugim 1/3, co daje 444 lub 222 łysych. Za podanie tylko jednego rozwiązania bez uzasadnienia, że są możliwe inne, przyznajemy 5 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

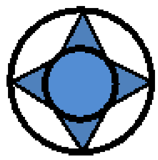
1) Adam i Bartosz startują w szkolnych zawodach przełajowych, ale obrali odmienne taktyki. Adam połowę czasu idzie, a połowę biegnie, a Bartosz połowę drogi idzie, a połowę biegnie. Obaj idą z prędkością 3km/h, a biegną z prędkością 6 km/h. Adam osiągnął czas 40 minut. Kto z nich miał lepszy czas?

2) Ile jest liczb czterocyfrowych, w których powtarza się co najmniej jedna cyfra?

3) Wycinek koła ma taki sam obwód, jak koło, z którego go wycięto. Jaki procent koła stanowił ten wycinek?

4) Alicja sumuje liczby nieparzyste do 199 i zapisuje sumy częściowe, tzn. wyniki działań 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, …, 1+3+5+…+197+199. Ile liczb na liście Alicji kończy się czwórką?

5) Rysunek przedstawia współśrodkowe okręgi o promieniach 1 i 2 oraz zacieniowany ośmiokąt równoboczny. Jaki jest jego obwód?



6) Rozważamy liczby postaci 10n+1, gdzie n jest całkowite dodatnie. Liczbę taką nazywamy smutasem, jeśli nie daje się przedstawić jako iloczyn dwóch liczb też takiej postaci. Ile jest smutasów wśród liczb mniejszych od 1000?

7) W prostokącie $PQRS$ stosunek boków PQ do QR wynosi 1:2. Punkt T jest rzutem prostokątnym S na przekątną PR. Jaki jest stosunek pola trójkąta RST do pola prostokąta?

8) Jak (nie używając pochodnych) można ustalić najmniejszą wartość wyrażenia x^6+x^3?

9) Jaki kształt geometryczny otrzymamy, zaznaczając na okręgu w równych odstępach 20132014 punktów i łącząc co 99. z nich, aż łamana się zamknie?

10) Dla każdej liczby możemy podać sumę jej cyfr, a dla tej sumy znowu sumę jej cyfr itd. Tę operację możemy powtarzać tak długo, dopóki nie dostaniemy liczby jednocyfrowej. Jaki wynik wyjdzie w przypadku zastosowania tego algorytmu do liczby $2^{3^{4^{5^{6^{7^{8^{9}}}}}}}$ (w kolejnych wykładnikach występują cyfry 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)?

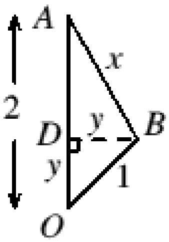
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Adam szedł 20 min i 20 min biegł (20 min to 1/3 godz). Zatem dystans wyścigu to $6\cdot1/3 + 3\cdot1/3 = 3$ km. Bartosz szedł 1,5 km i biegł 1,5 km, zatem jego czas to $1{,}5/3 + 1{,}5/6 = ½ + ¼ = ¾$ godziny. Czas Bartosza to 45 minut.

2. Liczb czterocyfrowych jest 9000 (9999–999). Od tego wystarczy odjęć te o wszystkich cyfrach różnych, a jest ich $9\cdot9\cdot8\cdot7$ (na pierwszym miejscu nie może stać zero). Mamy więc $9000–9\cdot9\cdot8\cdot7 = 9(1000–9\cdot8\cdot7) = 9\cdot8(125–9\cdot7) = 72\cdot62 = 4464$. Za prowadzenie obliczeń wprost przy poprawnym wyniku odejmujemy 2 pkt.

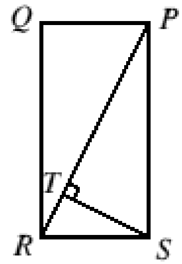
3. Niech koło ma promień r, a wycinek kąt środkowy α. Obwód wycinka koła to $2r+{}^{\alpha}/_{360}\cdot2\pi r$ i to równa się $2\pi r$. Zatem część koła, jaką stanowi wycinek, to ${}^{\alpha}/_{360}\cdot= (\pi-1)/\pi$, a to jest ok. 0,68. Czyli wycinek stanowił ok. 68% koła.

4. Wszystkich liczb Alicji jest tyle, co liczb nieparzystych od 1 do 199 czyli 100 (połowa liczb naturalnych od 1 do 200). Na ostatnią cyfrę sumy mają wpływ tylko ostatnie cyfry składników (wynika to z algorytmu dodawania pisemnego). Zatem zamiast dodawać kolejne liczby nieparzyste, możemy dodawać jako ostatni składnik do poprzedniej sumy liczby 1, 3, 5, 7, 9, 1 (zamiast 11), 3 (zamiast 13), 5, 7, 9 itd. (powtarza się to w cyklu co 5). Natomiast ostatnie cyfry otrzymywanych sum to 1, **4**, 9, 6, 5, 6, 9, **4**, 1, 0. To jest 10 kolejnych miejsc i dalej powtarza się w cyklu co 10. Zatem co 10 wyrazów dodajemy do tych samych ostatnich cyfr poprzedniej sumy te same ostatnie cyfry ostatnich składników. Wszystko powtarza się więc cyklicznie co 10 miejsc. Takich cykli w 100 wynikach jest 10, a w każdym cyklu cyfra 4 występuje na końcu 2 razy. Zatem łącznie wystąpi $10\cdot2=20$ razy.



5. Oznaczmy długość boku ośmiokąta przez x. Łącząc środek okręgu z wierzchołkami ośmiokąta, rozcinamy go na 8 przystających trójkątów (jak ten na rysunku) o bokach 2, 1, x. Kąt AOB ma miarę $360°:8 = 45°$. Niech D jest spodkiem wysokości y. Trójkąt BDO jest prostokątny równoramienny i z twierdzenia Pitagorasa mamy $2y^2 = 1$, czyli $y=\sqrt{2}/2$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ADB, mamy $x^2 = (2–y)^2+y^2$, co po wyliczeniu daje $x = 5–2\sqrt{2}$. Zatem obwód ośmiokąta wynosi $8\sqrt{(5–2\sqrt{2})}$. Długość x można też obliczyć z twierdzenia kosinusów dla trójkąta AOB.

6. Wszystkich liczb postaci $10n+1$ mniejszych od 1000 jest 99 (dla n od 1 do 99). Są to liczby 11, 21, 31, …, 991. Iloczyny liczb postaci $10n+1$ są nadal tej postaci. Iloczyny mniejsze od 1000 dają tylko liczby $11\cdot11$, $11\cdot21$, $11\cdot31$, …, $11\cdot81$, $21\cdot21$, $21\cdot31$, $21\cdot41$ i $31\cdot31$. Jest ich 12, zatem liczb smutasów jest $99–12 = 87$.



7. Trójkąty RST i RPS są podobne (cecha kk). Z twierdzenia Pitagorasa stosunek RS do RP wynosi $1:\sqrt{5}$. Zatem stosunek pól tych trójkątów to 1:5, a ponieważ to stosunek do połowy prostokąta, to do całości jest 1:10. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

8. Mamy $x^6+x^3 = (x^3+0{,}5)^2 - 0{,}25$. Kwadrat nigdy nie jest ujemny, ale w tym wypadku może mieć wartość 0, bo x^3 może przyjąć wartość -0,5. Zatem całe wyrażenie ma minimum równe $0-0{,}25 = -0{,}25$.

9. Liczby 99 i 20132014 są względnie pierwsze (wystarczy zastosować cechy podzielności przez 9 i 11, zaznaczając, że są to liczby względnie pierwsze – za brak tej uwagi odejmujemy 2 pkt, za niepoprawne przytoczenie cech podzielności odejmujemy 2 pkt, dowodów tych cech nie wymagamy). Zatem łamana zamknie się dopiero po narysowaniu odcinka nr 20132014. Otrzymany kształt będzie 20132014-kątem gwiaździstym foremnym o kącie rozwarcia ramion równym $180°/(20132014–2\cdot99) = (180/20131816)°$, bo jest to kąt wpisany oparty 20131816 jednakowych łukach. Za brak podania rozwartości odejmujemy 2 pkt, bo jest więcej liczb względnie pierwszych z 20132014, a więc i więcej różnych 20132014-kątów gwiaździstych foremnych.

10. W wykładniku nie ma mnożenia, zatem zapisu nie czyta się od dołu, tylko od góry. Za taki błąd (przy poprawnym rozwiązaniu – wychodzi wtedy 1) przyznajemy 2 pkt. Korzystamy z faktu, że liczba i suma jej cyfr dają taką samą resztę z dzielenia przez 9 (dowodzi się tego tak samo, jak cechy podzielności przez 9 – brak uzasadnia kosztuje 2 pkt). Zatem szukaną w zadaniu liczbą jednocyfrową jest reszta z dzielenia wyjściowej liczby przez 9. Trzeba zauważyć, że dla kolejnych potęg dwójki reszta z dzielenia przez 9 zmienia się okresowo co 6 (uzasadnienie za 2 pkt). Zatem wystarczy znaleźć resztę z dzielenia przez 6 piętrowego wykładnika. Jest ona równa 3, bo każda potęga trójki daje resztę 3 z dzielenia przez 6 (uzasadnienie 2 pkt). Zatem szukana reszta jest taka, jak z dzielenia przez 9 liczby 2^3, a więc 8.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ III

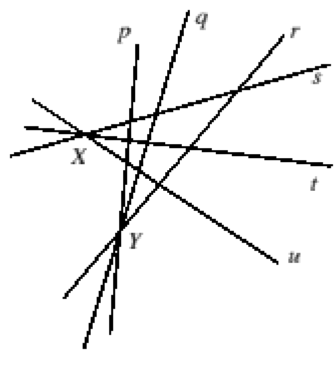
1) Kwadrat o boku 4 podzielono na 16 kwadratów jednostkowych. Ile par wierzchołków tych kwadratów znajduje się w całkowitej odległości?

2) Liczby naturalne a, b, c są różne. Żadna z nich nie jest kwadratem, ale ich iloczyny ab, ac i bc są kwadratami. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy $a+b+c$?

3) W turnieju rycerskim każdy uczestnik dostaje od króla 17 złotych guldenów za każdy pojedynek, w którym weźmie udział, a za zwycięstwo w pojedynku dostaje jeszcze 3 złote guldeny. Po zakończeniu turnieju Zawisza Czarny miał o 1 guldena więcej niż Zawisza Czerwony. Jaka jest najmniejsza liczba pojedynków, w których mógł brać udział Zawisza Czarny?

4) Nauczyciel poprosił uczniów, aby podali pięć liczb całkowitych, których mediana będzie o 1 większa niż średnia, a moda będzie o 1 większa niż mediana, przy czym mediana wynosi 10. Jaka najmniejsza możliwa z tych pięciu liczb?

5) Czy pierwiastki kwadratowe z trzech kolejnych liczb pierwszych mogą być wyrazami tego samego ciągu geometrycznego?



6) Rysunek przedstawia orientacyjny plan metra w Pacanowie. System składa się z sześciu linii p, q, r, s, t, u. W przecięciu każdych dwóch linii znajduje się stacja przesiadkowa. Wagony metra zatrzymują się na każdej z tych stacji. Koziołek Matołek chce dostać się ze stacji X do Y, ale nie chce jechać dwukrotnie tą samą linią ani wracać po drodze do stacji X. Na ile sposobów może odbyć tę podróż?

7) Twierdzenie Morleya z 1899 roku mówi, że sąsiednie trójsieczne sąsiednich kątów trójkąta równobocznego przecinają się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Jaki jest bok tego trójkąta, jeśli wyjściowy trójkąt ma bok długości 1?

8) W jakiej kolejności występują na osi liczby a, b, c, jeśli zachodzi równość $a^2+b^2-ab=c^2$?

9) Czy liczba $2^{10}+5^{12}$ jest pierwsza?

10) Jak (nie korzystając z kalkulatora) rozstrzygnąć, która z liczb jest większa: $\log_3 7$ czy $\log_5 19$?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W sumie jest 25 wierzchołków. Każdy z nich leży w rzędzie i w kolumnie 5 wierzchołków i do tych wierzchołków jego odległość jest całkowita. Daje to 25(5+5) = 250 par wierzchołków w całkowitej odległości (uwzględniając odległość 0, bez niej jest 200, ale za nieuwzględnienie odległości wierzchołków od siebie samych odejmujemy 2 pkt). Jednak każda para jest tu liczona dwukrotnie, więc trzeba wziąć połowę, czyli 125 par. Z twierdzenia Pitagorasa wiadomo, że pary znajdujące się w odległościach 3 w jednym i 4 w prostopadłym kierunku mają całkowitą odległość 5. Oznacza to 4 wierzchołki dużego kwadratu, z których każdy ma po 2 wierzchołki w odległości 5. Daje to 8 dodatkowych par, razem 133. Ponieważ nie ma innych trójek pitagorejskich złożonych z małych liczb (poniżej 4) to są już wszystkie możliwe pary.

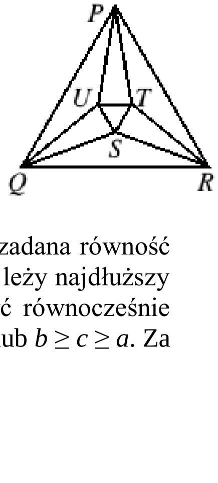
2. Niech $a=a_1a_2$, gdzie a_2 jest największym możliwym kwadratem dzielącym a. Analogicznie $b=b_1b_2$ i $c=c_1c_2$, gdzie b_2 i c_2 są największymi możliwymi kwadratami dzielącymi odpowiednio b i c. Zauważmy, że w rozkładach na czynniki pierwsze liczb a_1, b_1 i c_1, każdy czynnik występuje w pierwszej potędze (gdyby było inaczej, zostałby włączony w drugiej potędze do liczb odpowiednio a_2, b_2 i c_2). Ponieważ ab jest kwadratem (czyli każdy czynnik pierwszy występuje w jego rozkładzie w parzystej potędze), a_1b_1 też musi być kwadratem, czyli czynniki pierwsze a_1 muszą się powtarzać w b_1. Zatem $a_1 = b_1$. Analogicznie otrzymujemy $b_1 = c_1$. Najmniejsza możliwa wartość $a_1 = b_1 = c_1$, która nie jest kwadratem, to 2, a najmniejsze możliwe wartości a_2, b_2, i c_2, które są kwadratami, to 1, 4, i 9 (w jakiejś ustalonej kolejności, nie wiemy jakiej). Nie możemy określić najmniejszych wartości poszczególnych liczb a, b i c, ale $a+b+c$ osiąga najmniejszą wartość 2+8+18=28. Za podanie możliwych wartości liczb a, b, c bez uzasadnienia przyznajemy 5 pkt.

3. Zauważmy, że jeśli rycerze X i Y wygrają odpowiednio x i y pojedynków ($x \geq y$) i żadnych nie przegrywają, to różnica zdobytych przez nich guldenów jest taka sama, jakby X wygrał x-y pojedynków, a Y ani jednego [różnica dochodów w obu przypadkach wynosi $20(x-y)$]. Jeśli natomiast X wygrał x, a przegrał p pojedynków, a Y wygrał y i przegrał q pojedynków ($x \geq y$, $q \geq p$), to różnica w pieniądzach jest taka sama, co gdyby X wygrał x-y pojedynków i żadnego nie przegrał, a Y przegrał q-p pojedynków i żadnego nie wygrał [różnica dochodów w obu przypadkach wynosi $20(x-y)–17(q-p)$]. Zatem najmniejszą liczbę pojedynków Zawisza Czarny rozegra, jeśli wygra wszystkie, a Zawisza Czerwony wszystkie swoje przegra. Pieniądze zebrane z samych wygranych pojedynków to wielokrotności 20, a z samych przegranych to wielokrotności 17, czyli 17, 34, 51, 68, 85, 202, 119… i to jest pierwsza liczba, która różni się o 1 z wielokrotnością 20 równą 120. Zawisza Czarny rozegrał w tej sytuacji 6 rund i jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca warunki zadania. Za odpowiedź bez uzasadnienia przyznajemy 4 pkt.

4. Moda wynosi 11 i w zestawie muszą wystąpić co najmniej dwie takie liczby. Mediana wynosi 10, więc pozostałe dwie liczby nie przekraczają 10, ale moda jest 11, więc muszą być obie mniejsze od 10. Średnia wynosi 9, więc suma pięciu liczb to 45. Oznacza to, że najmniejsze dwie liczby w zestawie dają w sumie 45–22–10 = 13. Większa z nich może być równa co najwyżej 9, więc najmniejszą możliwą liczbą w zestawie jest 4. Za brak uzasadnienia każdego ze stwierdzeń odejmujemy po 2 pkt.

5. To nie muszą być kolejne wyrazy, więc $q = (\sqrt{(p_2)} / \sqrt{(p_1)})^{1/k}$ dla pewnego k naturalnego. Wówczas $\sqrt{(p_3)} = \sqrt{(p_1)} \cdot q^w$, gdzie w jest naturalne lub jest odwrotnością liczby naturalnej. Stąd $p_1^{w1} \cdot p_2^{w2} \cdot p_3^{w3} = 1$, dla wymiernych liczb w_1, w_2, w_3, co jest równoważne warunkowi $p_1^{j1} \cdot p_2^{j2} \cdot p_3^{j3} = 1$ dla pewnych wykładników naturalnych, bo możemy podnieść obie strony poprzedniej równości do potęgi będącej NWD mianowników wykładników w_i. Zaś ostatnia równość daje sprzeczność.

6. Koziołek musi wyruszyć jedną z linii przechodzących przez X czyli s, t lub u, a zakończyć podróż jedną z linii dochodzących do Y, czyli p, q, lub r. Żeby wyjechać z X i zakończyć w Y musi podróżować parzystą liczbą linii metra, tzn. dwoma, czterema lub sześcioma. A) przypadek 2 linii: wybiera jedną z trzech linii z X, przesiada się i dojeżdża jedną z trzech linii do Y, ma 3·3 = 9 możliwości. B) przypadek 4 linii: wybiera jedną z trzech linii z X, przesiada się po raz pierwszy na jedną z trzech linii p, q, r, potem przesiada się po raz drugi na jedną z linii s, t, u, której jeszcze nie używał (2 możliwości) i po raz trzeci przesiada się na jedną z linii p, q, r dotychczas nieużywaną, którą dojeżdża do Y, ma 3·3·2·2 = 36 możliwości. C) przypadek 6 linii jest analogiczny do poprzednich i daje 3·3·2·2·1·1 = 36 możliwości. Łącznie Koziołek Matołek może odbyć podróż na 9+36+36 = 81 sposobów.



7. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku. Kąty QPU, UPT i TPR mają po 20°. Z symetrii trójkąt PUT jest równoramienny, więc kąt PUT ma 80°. Niech punkty X i Y będą odpowiednio środkami boków PQ i UT. Z trójkąta prostokątnego PXU mamy cos20° = PX/PU, czyli $PU = PX$/cos20° = 1/2cos20°. Z trójkąta prostokątnego PUY mamy cos80° = UY/PU, czyli $UY = PU$cos80° = cos80°/2cos20°. Zatem UT = 2UY = cos80°/cos20°.

8. Weźmy trójkąt, którego boki mają długości a, b, c, a kąt naprzeciwko boku c ma miarę 60°. Wówczas zadana równość jest tezą twierdzenia cosinusów dla tego trójkąta. Wiadomo, że w trójkącie naprzeciwko największego kąta leży najdłuższy bok, a naprzeciwko najmniejszego kąta – najkrótszy. W tym trójkącie pozostałe dwa kąty nie mogą być równocześnie większe lub równocześnie mniejsze od 60°, bo suma wszystkich kątów nie dawałaby 180°. Zatem $a \geq c \geq b$ lub $b \geq c \geq a$. Za wskazanie tylko jednej możliwości przyznajemy 5 pkt.

9. $2^{10}+5^{12} = 2^{10}+5^{12}+2\cdot2^5\cdot5^6-2\cdot2^5\cdot5^6 = (2^5+5^6)^2-(2^3\cdot5^3)^2 = (2^5+5^6-2^35^3)(2^5+5^6+2^3\cdot5^3)$. Zostaje zauważyć, że ten rozkład nie zawiera jedynki. Pierwszy nawias przedstawia mniejszą liczbę i jest większy od 1, bo $5^6-2^3\cdot5^3 = 5^6-10^3 = 25^3-10^3 = 15\cdot(625+250+100) > 1$. Zatem liczba jest złożona..

10. Ze wzoru na zmianę podstaw logarytmu mamy: $\log_3 7 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$ oraz $\log_5 19 = \dfrac{\log 19}{\log 5}$. Zachodzi nierówność $\dfrac{\log 7}{\log 3} < \dfrac{\log 19}{\log 5}$, bo wystarczy licznik i mianownik prawej strony rozszerzyć przez 2, a lewej - przez 3. Mamy wtedy równoważnie $\dfrac{\log 343}{\log 27} < \dfrac{\log 361}{\log 25}$. Lewy ułamek ma mniejszy licznik i większy mianownik niż prawy, więc jest na pewno mniejszy. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.