DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1) Iloczyn trzech liczb pierwszych równa się pięciokrotności ich sumy. Jakie to liczby?

2) Ile wynosi $x^4+y^4+z^4$, jeśli $x+y+z=0$ i $x^2+y^2+z^2=m$.

3) Jakie są długości środkowych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b?

4) Znajdź wszystkie funkcje $f(x)$ spełniające równanie $3f(x) + f({}^{1}/_{x}) = x^2$, dla $x \neq 0$.

5) Wykaż, że w trójkącie zachodzi nierówność: ${}^{R}/_{r} > {}^{a}/_{h}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, r – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt, a – najdłuższym bokiem, a h – najkrótszą wysokością.

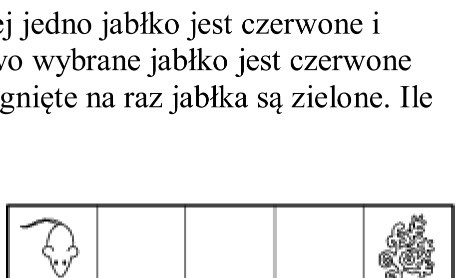
6) Jaka jest objętość równoległościanu, którego wszystkie ściany są rombami o boku długości a i kącie ostrym α?

7) Wpisując do programu rysującego wykresy funkcji zadanych parametrycznie układ równań: $X = \sin t$, $Y = \cos t$ (dla $0 < t < 2\pi$ oraz $-1 < X, Y < 1$), jako wykres otrzymamy okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1, bo $X^2 + Y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, a to jest właśnie kartezjańskie równanie jednostkowego okręgu. Jak zmienić równanie parametryczne, aby okrąg zaczął być rysowany z punktu antypodycznego i w przeciwnym kierunku niż poprzednio?

8) Ciąg (an) dany jest wzorami $a_1=1$, oraz $a_n = \left[\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right]$ dla $n>1$, gdzie [.] oznacza część całkowitą liczby. Wyznacz a_{1000}.

9) W koszu znajdują się jabłka zielone i czerwone. Przynajmniej jedno jabłko jest czerwone i przynajmniej dwa są zielone. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrane jabłko jest czerwone jest 42 razy większe niż prawdopodobieństwo, że dwa wyciągnięte na raz jabłka są zielone. Ile jest zielonych, a ile czerwonych jabłek?

10) W rogach planszy 5×3 znajdują się mysz, krab, ser i algi (patrz rysunek). Mysz chce dotrzeć jak najkrótszą drogą do sera, a krab – do alg. Zwierzęta przechodzą z pola na pole tylko wtedy, gdy te pola mają wspólny bok. Ruszają jednocześnie i co sekundę przesuwają się o jedno pole. Na ile sposobów mogą dotrzeć do swoich przysmaków tak, aby nigdy się nie spotkały?



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ II

1) Kostki do gry mają tę własność, że suma oczek na przeciwległych ściankach jest równa 7. Ustawiamy w rzędzie n kostek tak, aby sąsiednie stykały się ściankami, tworząc prostopadłościan. Jaka jest najmniejsza liczba pięciocyfrowa k taka, że nie da się ułożyć kostek tak, żeby suma oczek na ścianach prostopadłościanu byłaby równa k?

2) Rozwiąż w parach liczb naturalnych równanie $^{2}/_{(x+y)} = {}^{5}/_{x\cdot y}$.

3) Wartość której z liczb w ciągu $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ ... po raz pierwszy przekroczy 2?

4) Jaka liczba, ma w systemie dwójkowym taki sam zapis jak zapis w systemie dziesiętnym liczba większa od niej o liczbę minut w tygodniu?

5) Środki czterech kół o promieniu r znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku r. Ile wynosi pole części wspólnej tych czterech kół?

6) Liczba 220 jest sumą ilorazu, iloczynu, różnicy i sumy dwóch liczb całkowitych. Jakie to liczby?

7) Oblicz pole trapezu, znając pola dwóch trójkątów opartych na podstawach trapezu i o wspólnym wierzchołku w punkcie przecięcia przekątnych trapezu.

8) Szach Patiszach za wykonanie najpiękniejszej roszady przyznał matowi Szachipatowi nagrodę. Na lewym dolnym polu szachownicy położył jednego dukata, a na każdym z pozostałych pól położył dwukrotność tego, co znalazło się na polu poniżej lub na polu po lewej. Oblicz sprytnie, ile dukatów otrzymał mat?

9) Bracia Antek i Bartek zachorowali na grypę. Znudzony leżeniem w łóżku Bartek wymyślił grę w kupki. Z żetonów w jednym z czterech kolorów (zielonych, czerwonych, białych i niebieskich) ułożył cztery stosy po 24 jednakowe żetony w każdym i powiedział do Antka: „Zagrajmy w moją grę. Wygra ten, kto mniejszą liczbą ruchów ułoży z tych żetonów tyle kupek po cztery różne żetony, aby wyczerpać wszystkie możliwości. Pamiętaj, że nie może być dwóch kupek o jednakowym układzie żetonów. Jeden ruch to pobranie dowolnej liczby żetonów z jednego stosu i wyłożenie ich na kupki. Pobranie żetonów z kolejnego stosu, to już kolejny ruch. Ty spróbuj pierwszy.” W ilu ruchach Antek musi ułożyć żetony w kupki, aby mieć pewność, że nie przegra z Bartkiem?

10) Jaka jest reszta z dzielenia $13^{16} + 14^{16}$ przez 17?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1) Liczba dwucyfrowa jest sumą sześcianu swojej pierwszej cyfry i kwadratu drugiej. Co to za liczba?

2) Czy liczba $4^{11}+5^{24}+10^{12}$ jest pierwsza?

3) Jaką długość ma przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 6?

4) Suma cyfr pewnej liczby pięciocyfrowej wynosi 14. Gdy zamienimy miejscami cyfrę tysięcy z cyfrą jedności, to otrzymana liczba nie zmieni się. Ile jest takich liczb?

5) Ile rozwiązań w parach liczb całkowitych ma równanie $xy = 4(x + y)$?

6) Podaj przykład równania z niewiadomą x i parametrem a, które jest sprzeczne dla $a = 1$, tożsamościowe dla $a = 0$ i oznaczone (ma 1 pierwiastek) w pozostałych przypadkach.

7) Prostokąt o wymiarach całkowitych został rozcięty na dwanaście kwadratów o następujących długościach boków: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Ile wynosi obwód wyjściowego prostokąta?

8) Cztery osoby poruszają się wzdłuż prostej drogi, każda ze stałą prędkością. Pierwsza jedzie samochodem, druga motocyklem, trzecia skuterem, a czwarta rowerem. Kierowca samochodu spotkał prowadzącego skuter w południe, rowerzystę o 14, a motocyklistę o 16. Motocyklista spotkał jadącego skuterem o 17, a rowerzystę o 18. O której godzinie nastąpiło spotkanie rowerzysty z kierującym skuterem?

9) Dla jakiej wartości m pierwiastki równania $x^3-15\sqrt{2}x^2+mx-195\sqrt{2} = 0$ są długościami boków trójkąta prostokątnego?

10) W jaki sposób, mając do dyspozycji 100 m sznura, sekator, busolę, 25-centymetrową linijkę, 3 zaciosane drewniane kołki, małą metalową obręcz i puszkę coca-coli, można uwiązać baranka tak, aby pasł się w obszarze półkola o promieniu 20 m i nie mógł wyjść poza jego obręb?