DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

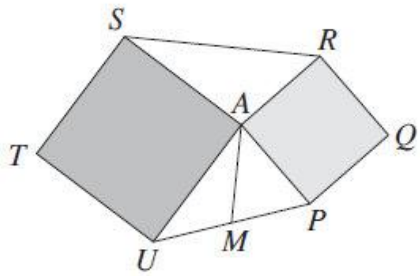
1) Dwa wycięte z tektury kwadraty o bokach odpowiednio 4 cm i 3 cm nałożono jeden na drugi w ten sposób, że wierzchołek mniejszego kwadratu pokrył się ze środkiem większego. Jeżeli usuniemy nakładające się części, to ile wynosi pole pozostałego obszaru?

2) Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie $\sin x = (\cos x - [\cos x])\cdot[\cos x]$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

3) Który z równoległoboków wpisanych w dany prostokąt o bokach równoległych do przekątnych tego prostokąta ma największy obwód? Ile on wynosi?

4) Rozwiąż w parach liczb rzeczywistych układ równań: $x^2 + xy - 2y^2 = -5$ i $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

5) W kwadracie *PQRS* łuk *QS* jest ćwiartką okręgu o środku w *P*. Ze środka boku *QR* poprowadzono styczną do tego łuku, która przecięła bok *RS* w punkcie *T*. W jakim stosunku punkt T podzielił ten bok?



6) Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p i q, dla których liczba $p^q + q^p$ jest pierwsza.

7) Kwadraty z rysunku mają wspólny wierzchołek *A*, a punkt *M* jest środkiem odcinka *PU*. Pokaż, że *AM* jest połową *RS*.

8) Liczba 12 może być rozłożona na iloczyn trzech czynników z uwzględnieniem ich kolejności na 18 sposobów (np. 1·3·4, 1·4·3, 2·2·3, 2·3·2 itd). Niech *N* będzie liczbą sekund w tygodniu. Na ile sposobów można rozłożyć *N* na iloczyn trzech czynników?

9) Czy istnieją trzy różne liczby całkowite dodatnie, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem?

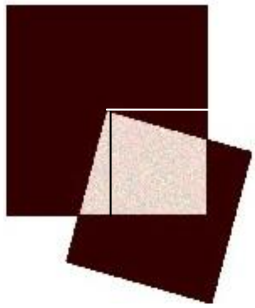
10) Na bal karnawałowy przyszło trzech singli w jednakowych karnawałowych maskach. Przedstawili się jako panowie Białecki, Zieleński i Czarnecki. Jeden z nich poprosił do tańca panią Arlettę, a był tak czarujący, że zakochała się od pierwszego wejrzenia. Ona też wyraźnie nie była swojemu partnerowi obojętna. Przetańczyli cały wieczór. Jednak o północy panowie pospiesznie opuścili lokal i wszelki ślad po nich zaginął. Zrozpaczona pani Arletta znalazła w szatni jedynie zielony trzewik, który zgubił jej ukochany. Zdesperowana postanowiła odnaleźć jego nazwisko w książce telefonicznej, udać się pod wskazany adres i znaleźć drugi trzewik do pary. Ku swemu przerażeniu uświadomiła sobie, że nie wie, jak nazywał się jej partner. Zrozpaczona usiadła w gronie koleżanek, które postanowiły jej pomóc w poszukiwaniach. Wspólnie ustaliły, co zapamiętały o tajemniczych kawalerach. Oto ich obserwacje:

- Wszyscy panowie nosili marynarkę, spodnie i trzewiki.
- Ich garderoba była w kolorze białym, zielonym i czarnym.
- Każda cześć garderoby występowała w trzech kolorach.
- Każdy miał tylko jeden element garderoby w danym kolorze (licząc parę trzewików jako całość).
- Trzewiki Czarneckiego były w tym samym kolorze, co marynarka Białeckiego.
- Mężczyzna o nazwisku odpowiadającym kolorowi spodni Białeckiego miał trzewiki w kolorze odpowiadającym nazwisku osoby w białej marynarce.
- Kolor trzewików Zieleńskiego odpowiadał nazwisku osoby ubranej w spodnie w takim kolorze, co marynarka człowieka, którego nazwisko odpowiada kolorowi trzewików Czarneckiego.

Jak nazywa się ukochany pani Arletty?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Małe trójkąty prostokątne z rysunku (biały i czarny) są przystające z cechy kbk. Mają ten sam kąt w wierzchołku dużego kwadratu (bo kąt biały i kąt czarny uzupełniają ten sam kąt do 90°) i mają kąt prosty oraz jedna przyprostokątna jest połową boku dużego kwadratu. Za stwierdzenie przystawania bez uzasadnienia, odejmujemy 5 pkt. Zatem pole części wspólnej kwadratów stanowi ćwiartkę pola dużego kwadratu. Pole czarne jest sumą pól obu kwadratów pomniejszoną o dwukrotność pola części wspólnej, czyli wynosi $4^2+3^2-2\cdot 4 = 17$. Za rozwiązanie w położeniu szczególnym (np. boki jednego kwadratu równoległe do boków lub przekątnych drugiego) przyznajemy 1 pkt.

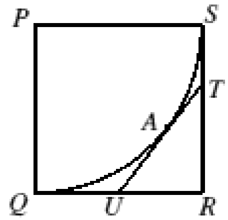


2. Dla $\sin x \geq 0$ każdego x dane równanie jest równoważne równaniu $\sin x = 0$, zatem jego rozwiązaniem jest $\{k\pi : k \in Z\}$. Dla $\sin x < 0$ równanie jest sprzeczne. Za rozważenie tylko jednego przypadku 4-5 pkt.

3. Niech przekątna prostokąta ma długość d. Rozważmy trójkąt prostokątny będący połową prostokąta uzyskaną po przecięciu go jedną z przekątnych. Prowadząc bok równoległoboku równolegle do przekątnej, odcinamy od tego trójkąta trójkąt do niego podobny w skali k (<1). Jeśli rozważymy teraz analogiczny trójkąt powstały z przecięcia prostokąta drugą przekątną, to tam sytuacja jest taka sama, tylko skala podobieństwa wynosi $(1-k)$, bo boki trójkątów sumują się do całego boku prostokąta. Zatem bok równoległoboku równoległy do jednej przekątnej ma długość kd, a do drugiej $(k-1)d$. Stąd obwód wszystkich równoległoboków wpisanych w prostokąt jest stały, bo zależy tylko od długości przekątnej tego prostokąta. Wynosi on $2kd + 2(1-k)d = 2d$. Za poprawne, ale bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

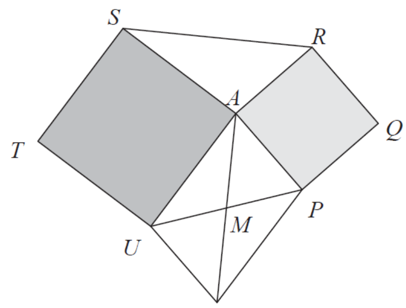
4. Mamy równoważnie $(3x-2y)(x+y)=-5$ i $(x+y)^2=1$. Z drugiego równania $x+y=1$ lub $x+y=-1$. Zatem $3x-2y=-5$ i $x+y=1$ albo $3x-2y=5$ i $x+y=-1$. Rozwiązując te układy otrzymujemy pary (-3/5, 8/5) i (3/5, -8/5). Za pominięcie jednej odejmujemy 5 pkt.

5. Niech U jest środkiem QR, A – punktem styczności, a $|RT|=x$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $|QR|=2$. Wtedy $|QU|=1$. Kąt z wpisanym okręgiem jest figurą osiowosymetryczną, zatem odcinki od jego wierzchołka do punktów styczności są przystające. Zatem $|QU|=|UA| = 1$ i $|AT|=|TS| = 2-x$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie URT mamy: $1+x^2 = (1+2-x)^2$, czyli $8-6x = 0$, skąd $x=4/3$. Oznacza to, że punkt T dzieli bok SR w stosunku 2/3 : 4/3 = 2:4 = 1:2, licząc od S (lub 2:1, licząc od R).



6. Liczba $p^q + q^p$ jest większa od 2, więc aby była pierwsza, musi być nieparzysta. Wobec tego jej składniki muszą mieć różną parzystość. To oznacza, że jedna z liczb p albo q musi być równa 2. Dla ustalenia uwagi niech jest to p. Wówczas $p^q + q^p = 2^q + q^2$, gdzie q jest nieparzyste. Łatwo sprawdzić, że nieparzyste potęgi dwójki dają z dzielenia przez 3 resztę 2 (za brak uzasadnienia -2 pkt), natomiast kwadraty liczb nieparzystych dają z dzielenia przez 3 resztę 0 dla wielokrotności trójki, a w pozostałych przypadkach resztę 1 (za brak uzasadnienia -3 pkt). Zatem $2^q + q^2$, jest podzielna przez 3 poza przypadkiem, gdy q jest wielokrotnością trójki, czyli $q=3$. Sprawdzamy, że para (2, 3), a z symetrii także (3, 2) dają w wyniku liczbę pierwszą: $2^3+3^2=17$. Za odpowiedź bez uzasadnienia, że jest jedyna, przyznajemy 1 pkt.

7. Przedłużmy odcinek AM, aby dostać równoległobok $AUBP$. Przekątne równoległoboku połowią się, więc M jest środkiem AB, a AM jest połową AB. Wystarczy teraz pokazać, że trójkąty APB i RAS są przystające (bkb) i stąd wynika teza. Zachodzi $PA \equiv AR$ jako boki kwadratu oraz $BP \equiv UA$ (jako boki równoległoboku) $\equiv AS$ (jako boki kwadratu). Zachodzi też $\measuredangle BPA + \measuredangle PAU = 180°$ (jako kąty równoległoboku), a także $\measuredangle RAS + \measuredangle PAU = 180°$ (bo razem z dwoma kątami prostymi dają kąt pełny). Wobec tego $\measuredangle BPA \equiv \measuredangle PAU$, ckd. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie (np. z użyciem twierdzenia kosinusów) odejmujemy 2 pkt.



8. Mamy $7\cdot 24\cdot 60^2 = 2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$. Każdy czynnik pierwszy występujący w potędze n można przydzielić do jednego z trzech czynników na $\binom{n+2}{2}$ sposoby (oznaczmy czynniki pierwsze kropkami, ustawmy je w szeregu i dodajmy jeszcze 2 kropki; teraz wskazanie 2 kropek – separatorów między pozostałymi kropkami ustala podział n kropek na 3 grupy). Każdy z czynników przydzielamy do grup niezależnie od pozostałych, dlatego stosujemy regułę iloczynu. Wszystkich podziałów jest więc $\binom{9}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2} = 36\cdot 10\cdot 6\cdot 3 = 6480$.

9. Takie liczby istnieją, np. 41, 80, 320. Mamy 41+80+320 = 441 = 21^2, 80+320 = 400 = 20^2, 41+320 = 361 = 19^2, 41+80 = 121 = 11^2. Aby znaleźć ten przykład, zakładamy, że trzy z tych liczb są kwadratami kolejnych liczb naturalnych, tzn $a+b+c = (x+1)^2 = x^2+2x+1$, $a+b = x^2$ i $b+c = (x-1)^2 = x^2-2x+1$. Wobec tego $c = 2x+1$ i $a=4x$. Stąd $a+c = 6x+1$. Liczba ta jest kwadratem np. dla x=20.

10. .Zakodujmy kolory ubrań w kolejności marynarka – spodnie – trzewiki. Jest 6 możliwości, bo żaden się nie powtarza: BCZ, BZC, CBZ, CZB, ZBC i ZCB. Załóżmy, że Zieleński nosił zestaw ZCB. Pozostali dwaj nie mogli nosić ZBC, CZB i BCZ (bo zielona marynarka, czarne spodnie i białe trzewiki są już zajęte). Zostały 2 możliwości CBZ i BZC, a to są cykliczne permutacje początkowo wybranego ZCB i można je przypisać pozostałym panom na 2 sposoby. Rozpatrujemy teraz wszystkie 6 możliwości ubioru Zieleńskiego i po 2 możliwości ubioru pozostałych. Mamy tabelę:

l.p.	Zieleński	Czarnecki	Białecki
1	ZCB	CBZ	BZC
2	ZCB	BZC	CBZ
3	ZBC	BCZ	CZB
4	ZBC	CZB	BCZ
5	CBZ	BZC	ZCB
6	CBZ	ZCB	BZC
7	CZB	ZBC	BCZ
8	CZB	BCZ	ZBC
9	BCZ	CZB	ZBC
10	BCZ	ZBC	CZB
11	BZC	ZCB	CBZ
12	BZC	CBZ	ZCB

Skoro trzewiki Czarneckiego były w kolorze marynarki Białeckiego, ostatnia litera w kolumnie C musi być taka, jak pierwsza w kolumnie B, co wyklucza wiersze nieparzyste. Sprawdzamy warunek, że osoba o nazwisku od koloru spodni Białeckiego ma skarpetki w kolorze nazwiska pana w białej marynarce. Np. w wierszu 2 białe spodnie ma Białecki, a białą marynarkę ma Czarnecki, więc Białecki powinien mieć czarne trzewiki, a nie ma. Ten wiersz wykreślamy. Podobnie analizujemy 5 pozostałych wierszy. Zostają te o numerach 8 i 12. Teraz sprawdzamy warunek, że trzewiki Zieleńskiego mają kolor od nazwiska osoby, której spodnie mają kolor marynarki tego, kto ma nazwisko w kolorze trzewików Czarneckiego. Ten warunek nie zachodzi w 8, a zachodzi w 12. Tam zielone trzewiki miał Czarnecki i on jest ukochanym Arletty.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

1. W trapezie równoramiennym przekątne o długości 12 cm przecinają się w punkcie S pod kątem $30°$. Punkty K, L, M, N są środkami boków trapezu. Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

2. Zbiór M zawiera wszystkie liczby siedmiocyfrowe o różnych cyfrach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Rozstrzygnij, czy w zbiorze M istnieje takich 77 liczb, że suma 33 z nich jest równa sumie 44 pozostałych.

3. Wykaż, że jeżeli $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ dla niezerowych a, b, c oraz $a+b+c$, to wśród liczb a, b, c jest para liczb przeciwnych.

4. Wykaż, że liczba $(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)$ jest podzielna przez $2^{128} - 1$.

5. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC dane są odpowiednio punkty M, N i P takie, że $|AM|:|MB| = |BN|:|NC| = |CP|:|PA| = k$. Jaka jest wartość k, jeżeli pole trójkąta MNP stanowi 7/25 pola trójkąta ABC?

6. Przy drodze w odległości 10 m jeden od drugiego leżały słupki. Robotnik przeniósł pojedynczo wszystkie słupki, zaczynając od pierwszego, tam, gdzie leżał ostatni. Ile było słupków, jeżeli robotnik przeszedł drogę 40642,56 km?

7. Ile wynosi dwucyfrowa końcówka liczby $2017^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{3^{2^{1}}}}}}}$?

8. Udowodnij, że jeśli suma wysokości trójkąta jest dziewięć razy większa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt jest równoboczny.

9. Wyznacz funkcję f przedziałami liniową, o której wiadomo, że $f(|x-1|) = 2x-4$.

10. Ile jest liczb 10-cyfrowych o różnych cyfrach od 0 do 9, mających tę własność, że liczba utworzona z pierwszej (od lewej) cyfry dzieli się przez 1, utworzona z pierwszych 2 cyfr dzieli się przez 2, z pierwszych 3 cyfr dzieli się przez 3, z pierwszych 4 cyfr dzieli się przez 4, z pierwszych 5 cyfr dzieli się przez 5, …, z pierwszych 9 – dzieli się przez 9, a z 10 przez 10?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na mocy twierdzenie o linii średniej trójkąta powstały czworokąt jest rombem o boku długości 6 cm (za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 3 pkt) o kątach 30° i 150°. Wysokość opuszczona na bok rombu tworzy trójkąt ekierkowy 30-60-90, więc ma 3cm długości. Stąd pole rombu wynosi $6\cdot 3=18$ cm^2. Za bardziej skomplikowane rozumowanie, w szczególności używające trygonometrii, odejmujemy 2 pkt. Za brak jednostek odejmujemy 1 pkt.

2. Liczby ze zbioru M mają sumę cyfr 28, czyli ich reszty z dzielenia przez 3 wynoszą jeden (za brak uzasadnienia że reszta z dzielenia liczby przez 3 jest taka sama, jak reszta z dzielenia sumy cyfr tej liczby przez 3 odejmujemy 2 pkt). Suma 33 liczb ze zbioru M jest więc podzielna przez 3, natomiast suma 44 takich liczb daje z dzielenia przez 3 resztę 2. Zatem takie dwie sumy nie mogą być równe. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odjąć 2 pkt.

3. Po sprowadzeniu lewej strony do wspólnego mianownika mamy $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$ i dalej $abc = (a+b+c)(bc+ac+ab)$. Po wymnożeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych dostajemy $0 = a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2+2abc = (a+b)(b+c)(c+a)$. Stąd jeden z czynników musi być zerem, ckd.

4. Mnożymy daną liczbę przez 1=2–1. Ze wzoru na różnicę kwadratów nawiasy kolejno się redukują i mamy $(2^1-1)(2^1+1)(2^2+1)\ldots = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) = \ldots$ Na końcu otrzymujemy wynik $2^{128}-1$, podzielność jest więc oczywista. Można też zauważyć, że po wymnożeniu wszystkich nawiasów otrzymamy liczbę $1+2^1+2^2+2^3+...+2^{126}+2^{127}$, co daje liczbę zapisaną samymi jedynkami w systemie dwójkowym (127 sztuk), a to jest o 1 mniej niż kolejna potęga dwójki, czyli $2^{128}-1$.

5. Niech kąty przy wierzchołkach A, B, C mają miary odpowiednio α, β, γ, a odcinki na bokach mają długości $|MB|=a$, $|NC|=b$, $|PA|=c$. Wówczas $|AB| = (k+1)a$, $|BC|=(k+1)b$, $|CA|=(k+1)c$. Suma pól P_1, P_2, P_3 trójkątów odciętych przez MNP stanowi $^{18}/_{25}$ pola ABC i wynosi $½kac\sin\alpha + ½kba\sin\beta + ½kcb\sin\gamma$. Pole P trójkąta ABC wynosi $½(k+1)^2ac\sin\alpha = ½(k+1)^2ab\sin\beta = ½(k+1)^2bc\sin\gamma$. Zatem trzykrotność pola ABC to $(P_1+P_2+P_3)(k+1)^2/k$. Natomiast $^{18}/_{25}P = P_1+P_2+P_3 = 3Pk/(k+1)^2$. Po skróceniu przez P mamy $^{18}/_{25} = 3k/(k^2+2k+1)$, co daje równanie $6k^2-13k+6 = 0$, Stąd $k={}^2/_3$ lub $k={}^3/_2$.

6. Załóżmy, że słupków było n. Niosąc pierwszy, robotnik pokonał $10(n-1)$ metrów, a następnie dwukrotnie pokonywał każdy z dystansów od $10(n-2)$ do $10\cdot 1$. Łączna droga wyniosła $10(1+2+\ldots+n-1) + 10(1+2+\ldots+n-2) = 10n(n-1)/2 + 10(n-1)(n-2)/2 = 5(n-1)(2n-2) = 10(n-1)^2 = 40642560$ m. Stąd $(n-1)^2 = 4064256$. Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest 2017.

7. Na podstawie algorytmu mnożenie pisemnego wnosimy, że dwie ostatnie cyfry iloczynu zależą tylko od dwucyfrowych końcówek czynników (za podanie tego faktu bez uzasadnienia odejmujemy 2 pkt). Można sprawdzić, że dwucyfrowe końcówki potęg liczby 17 układają się w cykliczny ciąg długości 20: 17, 89, 13, 21, 57, 69, 73, 41, 97, 49, 33, 61, 37, 29, 93, 81, 77, 09, 53, 01. Ponieważ 2016 jest podzielne przez 4, cały wykładnik W jest podzielny przez 4. Ponieważ 2016 daje resztę 1 z dzielenia przez 5, każda potęga 2016 daje również resztę 1 z dzielenia przez 5 (za brak uzasadnienia odejmujemy 3 pkt), zatem cały wykładnik W daje resztę 1 z dzielenia przez 5. Mamy $W=4n$ i $W=5k+1$, czyli $5W=20n$ i $4W=20k+4$. Odejmując stronami, otrzymujemy $W=20(n-k)-4$, co oznacza, że W z dzielenia przez 20 daje resztę 16. Zatem dwucyfrowa końcówka wyniku to 81.

8. Niech P oznacza pole trójkąta, r – promień okręgu wpisanego, a, b, c – długości boków, a h_1, h_2, h_3 odpowiednio wysokości opuszczone na te boki. Zachodzi $2P = r(a+b+c)$ – ten wzór uczeń powinien uzasadnić na prośbę jury, jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 2 pkt. Zatem $2P(^1/_a+^1/_b+^1/_c) = h_1+h_2+h_3 = 9r$. Stąd $9 = (a+b+c)(^1/_a+^1/_b+^1/_c)$ lub równoważnie $(a+b+c)/3 = 3/(^1/_a+^1/_b+^1/_c)$. Otrzymaliśmy w ten sposób równość średnich arytmetycznej i harmonicznej trzech liczb, która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b=c$. Nierówność miedzy średnimi na prośbę jury uczeń powinien uzasadnić, inaczej odjąć 3 pkt. Równość $9 = (a+b+c)(^1/_a+^1/_b+^1/_c)$ można też zapisać w równoważnej postaci $3 + (^a/_b+^b/_a) + (^a/_c+^c/_a) + (^b/_c+^c/_b)$, a ponieważ a, b, c są dodatnie, skorzystać trzykrotnie z nierówności $^a/_b+^b/_a \geq 2$, która daje równość wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$ (za brak uwzględnienia założenia dodatniości odjąć 2 pkt, nierówność na prośbę jury należy uzasadnić, inaczej odjąć 3 pkt).

9. Z symetrii wystarczy narysować wykres dla $x\geq 1$ i odbić względem prostej $x=1$. Za niezauważenie symetrii i rozpatrywanie osobno dwóch obszarów odejmujemy 2 pkt. Na obszarze $x\geq 1$ moduł w równości znika i szukany wykres jest półprostą $\{(x, y)\colon y=2x-4, x\geq 1\}$ przesuniętą o wektor [1, 0]. Zatem cała funkcja ma wzór $f(x)=\begin{cases}-2x-2, \text{ dla } x\leq 1\\ 2x-6, \text{ dla } x\geq 1\end{cases}$.

10. Warunki zadania spełnia jako jedyna liczba **3816547290**. Jej dziesiątą cyfrą musi być 0 (bo dzieli się przez 10). Suma cyfr 1+2+…+9 = 45 i jest podzielna przez 9, więc zawsze uda się uzyskać podzielność przez 9. Na miejscach parzystych (licząc od lewej) muszą stać cyfry parzyste, więc na miejscach o numerach nieparzystych – cyfry nieparzyste, przy czym na V miejscu musi stać 5. Na miejscu IV może być tylko 2 lub 6 (bo cyfrę tę poprzedza cyfra nieparzysta, a tylko z taką końcówką liczba będzie podzielna przez 4). Na VIII miejscu też może być tylko 2 lub 6 (z tych samych powodów), przy czym jeśli będzie to 2, to musi być poprzedzone przez 3 lub 7 (bo tylko takie trzycyfrowe końcówki z cyfrą parzystą na początku dzielą się przez 8), a jeśli będzie to 6, to musi być poprzedzone przez 1 lub 9. Wobec tego na miejscu II i VI może być tylko 4 lub 8 (związane z 2 i 6 na miejscu IV, tzn. 2 występuje z 4, a 6 z 8). Sprawdźmy więc 2 przypadki: a) gdy na II miejscu jest 4 i b) gdy na II miejscu jest 8. W a) po bokach 4 musi być 1 i 7 (w dowolnej kolejności), aby uzyskać podzielność przez 3. Wtedy na siedmiu początkowych miejscach mamy 1472589 (bo na VIII miejscu musi być 6 więc przed nim 9) albo 7412589, ale żadna z nich nie dzieli się przez 7. Zatem zachodzi b). Na II miejscu stoi 8, a obok (1 lub 7) z (3 lub 9) w dowolnej kolejności. Musimy zatem sprawdzić takie liczby: 1836547, 3816547, 1896547, 9816547, 1896543, 9816543, 7896543, 9876543. Podzielność przez 7 daje tylko 3816547, więc taki musi być początek liczby. Pozostała cyfra 2 na miejsce VIII i cyfra IX na miejsce 9. Wykonaliśmy 8 bezpośrednich sprawdzeń. Za rozwiązanie, w którym jest ich istotnie więcej odejmujemy co najmniej 2 punkty. Za podanie wyniku bez uzasadnienia jego jedyności przyznajemy 4 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD i wyznaczono na niej punkt E, który podzielił tę środkową w stosunku 1:3, licząc od wierzchołka. Prosta przechodząca przez punkty A i E przecina bok BC w punkcie P. W jakim stosunku P dzieli bok BC?

2. Pewna liczba zapisana w systemie dziesiętnym ma cyfrę jedności równą 5 i jest czterokrotnie mniejsza od liczby, która powstanie z przeniesienia tej cyfry na początek. Jaka jest najmniejsza liczba o tej własności?

3. Rozwiąż w liczbach dodatnich nierówność $x^{x^x} < x^{x \cdot x}$.

4. Dana jest szachownica o wymiarach 6×6, na której zostało ułożone 18 płytek o wymiarach 1×2. Udowodnij, że istnieje prostoliniowe cięcie szachownicy wzdłuż linii kratowych nieprzecinające żadnej z płytek.

5. Punkty kratowe o współrzędnych naturalnych ustawiono w następujący ciąg (1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), … itd. Jaki punkt znalazł się na 2017 miejscu tego ciągu? Podaj formułę algebraiczną na n -ty wyraz tego ciągu.

6. Oblicz sprytnie $\dfrac{2017^3 + 2016^3}{2017^2 - 2016^2}$.

7. Dane jest równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b, c są jednocyfrowymi liczbami pierwszymi. Ile z takich równań ma przynajmniej jeden pierwiastek całkowity?

8. Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych dodatnich $x! + 76 = y^2$.

9. Na tablicy nauczyciel zapisał 2016 znaków „+” oraz 2017 znaków „–”. Następnie uczniowie zaczęli je zmazywać (każdy po 2 sztuki) według następujących reguł: jeśli uczeń zmazał 2 jednakowe znaki, zastępował je znakiem „+”, a jeśli 2 różne znaki, zastępował je znakiem „–”. Znaki zmazywano dopóty, dopóki na tablicy nie pozostał jeden symbol. Jaki to był symbol?

10. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a}$, gdzie a, b, c są dodatnie.

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy $|CE|:|ED| = 1:3$. Na prostej CD rozpoczynając od punktu C odkładamy 7 razy odcinek CE i przez uzyskane w ten sposób punkty prowadzimy proste równoległe do AE. Punkty przecięcia tych prostych z odcinkiem AD dzielą go na 3 równe części (bo dzielą ED na 3 równe części i stosujemy twierdzenie Talesa). Punkty przecięcia dorysowanych prostych z odcinkiem DB także dzielą go na 3 równe części (bo $AD \equiv DB$). Mamy zatem 7 prostych równoległych, które (z twierdzenia Talesa) dzielą CB na 7 równych części i pierwsza z nich przechodzi przez P. stąd $|CP|:|PB| = 1:6$.

2. Korzystając z algorytmu mnożenia pisemnego, mnożymy cyfrę jedności (=5) przez 4 i otrzymujemy 20, stąd wiemy, że cyfra dziesiątek szukanej liczby to 0. Z mnożenia 0 przez 4 otrzymujemy 0 i dodajemy 2 z przeniesienia, zatem cyfra setek szukanej liczby to 2. Analogicznie uzyskujemy jako kolejne cyfry od prawej 8, 2, 1. Na tym kończymy, bo $4 \cdot 1$ i 1 z przeniesienia daje na początku cyfrę 5. Zatem szukana liczba to 128205.

3. Z definicji funkcji wykładniczej $x>0$. Dla $x=1$ zachodzi równość. Rozważmy osobno przypadki a) $x<1$ i b) $x>1$.
a) Funkcja wykładnicza o podstawie mniejszej od 1 jest malejąca, zatem nierówność między wartościami daje równoważnie nierówność miedzy wykładnikami $x^x > x^2$ i dalej na mocy tego samego argumentu $x<2$. Zatem w tym przypadku nierówność jest tożsamością.
b) Funkcja wykładnicza o podstawie większej od 1 jest rosnąca, zatem dana nierówność jest równoważna $x^x < x^2$ i dalej $x<2$. Zatem w tym przypadku $1<x<2$.
Ostatecznie rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(0, 2)\setminus\{1\}$. Konieczne jest wyraźne rozważenie każdej funkcji wykładniczej z osobna. Stwierdzenie typu „funkcja x^x jest malejąca dla $x<1$" jest fałszywe (ta funkcja ma minimum w $^1/_e$ i potem rośnie). Za takie przekłamanie przyznajemy 7 pkt.

4. Każde prostoliniowe cięcie szachownicy 6×6 wzdłuż linii kratowych dzieli szachownicę na dwie części o parzystych liczbach pól. Stąd wynika, że jeśli szachownicę pokryjemy płytkami o wymiarach 1×2, to każde prostoliniowe cięcie szachownicy wzdłuż linii kratowych przetnie parzystą liczbę płytek (bo gdyby było inaczej, po jednej stronie cięcia znalazłaby się nieparzysta liczba pól). Załóżmy (wbrew treści zadania), że każde prostoliniowe cięcie szachownicy wzdłuż linii kratowych jakąś płytkę przecina. Wówczas musi przecinać co najmniej 2 płytki. Wszystkich prostoliniowych cięć szachownicy jest 10 (5 pionowych i 5 poziomych). Każda płytka może być przecięta tylko przez jedno prostoliniowe cięcie. Zatem musiałoby być co najmniej $2 \cdot 10=20$ płytek, co jest sprzeczne z warunkami zadania. Za rozumowanie na przykładach przyznajemy do 3 pkt.

5. Ciąg 'wędruje' wzdłuż kolejnych linii przekątniowych o długościach 1, 2, 3, … Sumy liczb wyrazów z kolejnych przekątnych dają kolejne liczby trójkątne. Największą liczbą trójkątną nie przekraczającą 2017 jest 2016, bo $1+2+3+\ldots+k = {}^{(k+1)k}/_2 = 2016$, daje $k=63$. Zatem 2016 wyrazów zapełni 63 linie przekątniowe, a wyraz 2017 będzie pierwszym w 64 linii, zatem będzie wynosił (64, 1). Do tego miejsca przyznajemy 3 pkt. Ogólna formuła $a_n = (k+2-j, j)$, gdzie T_k jest największą liczbą trójkątną nie przekraczającą n i $n=T_k+j = 1+2+3+\ldots+k + j = {}^{(k+1)k}/_2+j$ dla $j<k+1$.

6. Upraszczamy wyrażenie $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}$. Różnica a i b wynosi w tym przypadku 1, zatem wyrażenie z zadania to $2017^2-2017 \cdot 2016+2016^2 = 2017(2017-2016)+2016^2 = 2017+2016^2 = 4066273$. Wykonaliśmy 1 mnożenie i jedno dodawanie. Za bardziej skomplikowane rachunki odejmujemy 2 pkt.

7. Ponieważ a, b, c są pierwsze, są liczbami całkowitymi większymi od 1. Jeśli równanie kwadratowe ma pierwiastek całkowity P, można je zapisać jako $(Ax-P)(Bx-Q)$. Skoro wyraz wolny $c=PQ$ jest pierwszy, liczby P i Q mogą być równe ± 1 lub $\pm c$. Podobnie ponieważ $a = AB$ jest pierwsze, liczby A i B mogą być równe ± 1 lub $\pm a$. Z dodatniości a i c możliwości ujemne odpadają. Zatem postać iloczynowa trójmianu wygląda tak $(ax+c)(x+1)$ lub $(ax+1)(x+c)$. Z porównania współczynników w pierwszym przypadku $b=a+c$, a w drugim $b=ac+1$. Dla liczby pierwszej $b=a+c$, albo a, albo c musi być równe 2, więc (a, b, c) jest jedną z trójek (2, 5, 3), (2, 7, 5), (3, 5, 2) lub (5, 7, 2). Dla liczby pierwszej $b=ac+1$, jedna z liczb a, c lub obie te liczby są równe 2, więc (a, b, c) jest jedną z trójek (2, 5, 2), (2, 7, 3) lub (3, 7, 2). W sumie jest 7 równań spełniających warunki zadania. Za pominięcie każdego przypadku odejmujemy 4 pkt do zera.

8. Niech $y=8k+r$. Wówczas $y^2 = 64k^2+16kr+r^2$, czyli kwadrat liczby z dzielenia przez 16 daje reszty takie, jak kwadraty liczb od 0 do 7, czyli 0, 1, 4 lub 9. Dla $x \geq 6$, $x!$ jest wielokrotnością $6!=720$, czyli dzieli się przez 16, zatem $x!+76$ daje z dzielenia przez 16 resztę taką jak 76, czyli 12, a więc nie może być kwadratem. Pozostały do sprawdzenia x od 1 do 5, Dla $x=1, 2, 3$ otrzymujemy reszty z dzielenia przez 16 odpowiednio 13, 14, 2, zatem te liczby nie mogą być kwadratami. Dla $x=4$ mamy $x!+76=100=10^2$, a dla $x=5$ mamy $x!+76=196=14^2$. Jedyne pary spełniające równanie to (4, 10) i (5, 14). Za odpowiedź bez uzasadnienia jedyności odejmujemy 2 pkt. Za kolejne sprawdzenia bez wcześniejszego ograniczenia ich liczby odejmujemy 4 pkt.

9. Procedura zmazywania zachowuje parzystość liczby minusów. Ponieważ na początku było ich nieparzyście wiele i to się nie zmienia, na końcu musi pozostać znak „– ”. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt. Za rozumowanie na przykładach przyznajemy 2 pkt.

10. Stosujemy nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dwóch liczb. Uczeń na prośbę jury powinien ją uzasadnić, jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 2 pkt. Zacznijmy od liczb a^2/b i b/c^2. Otrzymujemy $\frac{a^2/b + b/c^2}{2} \geq \sqrt{a^2/b \cdot b/c^2} = \frac{a}{c}$. Tę samą nierówność stosujemy teraz do liczb $2a/c$ i c/a. Mamy $\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a} \geq 2a/c + c/a \geq 2\sqrt{2a/c \cdot c/a} = 2\sqrt{2}$. Dane wyrażenie nie przekracza więc tej wartości (do tego miejsca przyznajemy 5 pkt). Należy jeszcze pokazać, że wartość ta jest przyjmowana dla jakichś wartości a, b i c. Równości w nierównościach zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2/b = b/c^2$ oraz $2a/c = c/a$. Przyjmijmy $a=1$. Podstawiając ją do II równania, dostajemy $c=\sqrt{2}$, a z I równania dostajemy wtedy $b=\sqrt{2}$.