DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1. Adam i Bartek z nudów wymyślili pewna grę. Na kartce zapisali jeden za drugim ciąg k minusów. Grając, wykonują ruchy na przemian. W każdym ruchu gracz może zmienić jeden lub dwa sąsiednie minusy na plusy. Wygrywa ten, który zmieni ostatni minus. Adam wykonuje ruch jako pierwszy. Jak powinien grać, aby wygrać?

2. Dany jest różnoramienny trójkąt ABC. Na ile sposobów można zaznaczyć w płaszczyźnie tego trójkąta czwarty punkt D tak, żeby figura złożona z punktów A, B, C i D miała oś symetrii?

3. Basia ma w portfelu 11 złotówek oraz trochę monet 50-groszowych i 20-groszowych. Średnia wartości jej monet wynosi 52 grosze. Basia policzyła swoje monety w portfelu i wyszło jej 40. Adaś też je policzył i twierdzi, że musiała się pomylić. Kto ma rację?

4. Pewien wielokąt wypukły przecięto wzdłuż prostej. Okazało się, że liczby wierzchołków otrzymanych części oraz początkowego wielokąta (wzięte w dowolnej kolejności) to trzy kolejne liczby naturalne. Co to był za wielokąt?

5. Jakie jest prawdopodobieństwo zbudowania na trzech losowo wybranych wierzchołkach sześcianu trójkąta prostokątnego?

6. Oblicz sumę współczynników wielomianu $W(x) = 1 + (4x–1) + (4x–1)^2 +\ldots+ (4x–1)^k$, gdzie $k \in \mathrm{N}$.

7. Jaka jest największa możliwa liczba kątów ostrych w wielokącie wypukłym?

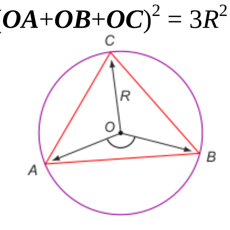
8. Dla jakich wartości parametru a równanie $(a^2+1)(x^2+y^2) – 2(a+1)(x+y) + 2(1+2axy) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek?

9. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = xD(x)$, gdzie $D(x)$ jest funkcją Dirichleta, która dla argumentów niewymiernych przyjmuje wartość 0, a dla wymiernych – wartość 1.

10. W trójkącie ABC miary katów wewnętrznych wynoszą α, β, γ. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć wyrażenie $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jeśli k jest nieparzyste, to w pierwszym ruchu Adam powinien skreślić środkowy minus, a jeśli jest parzyste, to dwa środkowe minusy. Każdy następny ruch Adam powinien wykonywać symetrycznie do ruchu przeciwnika względem środka ciągu minusów. Jeśli Bartek mógł wykonać ruch, to Adam ma również taką możliwość, więc nigdy nie przegra.
2. Jeśli zbiór 4-punktowy ma oś symetrii, musi ona przechodzić przez dwa z tych punktów (pozostałe dwa leżą względem niej symetrycznie), albo nie przechodzić przez żaden z tych punktów (punkty parami leżą względem niej symetrycznie). W innym przypadku zbiór musi składać się z 5 punktów (na osi leży 1 lub 3 z nich), albo wszystkie punkty są współliniowe (na osi leżą 4 z nich), ale wtedy A, B, C nie tworzą trójkąta. Są trzy możliwości poprowadzenia osi symetrii przez dwa punkty (to proste zawierające kolejne boki trójkąta) – trzeci wierzchołek nie leży na żadnej z nich, więc odbija się w każdej symetrycznie, dając możliwy punkt D – oraz trzy możliwości poprowadzenia osi symetrii, względem której każda para wierzchołków będzie juz symetryczna (to symetralne boków trójkąta) – trzeci wierzchołek nie leży na żadnej z nich, bo trójkąt nie jest równoramienny, więc odbija się w każdej symetrycznie, dając możliwy punkt D. Jest zatem 6 możliwych położeń D, ale tylko wtedy, gdy trójkąt ABC nie jest prostokątny. Jeśli jest, możliwych położeń D jest tylko 5, gdyż te uzyskane w symetrii względem symetralnych przyprostokątnych, pokrywają się. Za niezauważenie tego przypadku odejmujemy 5 pkt.
3. Niech p i d to liczby monet 50- i 20-groszowych odpowiednio. Liczba monet Basi to $11+p+d$. Ich wartość wynosi zarówno $(11+p+d)\cdot 52$ jak i $1100+50p+20d$. Po przyrównaniu tych wielkości otrzymujemy $32p+2d = 528$, czyli $16p+d = 264$ lub inaczej $11+p+d = 275–15p = 270–15p+5 = 15(18–p)+5$. Widać, że liczba monet w portfelu daje resztę 5 z dzielenia przez 15, a 40 nie jest taką liczbą. Basia źle policzyła monety
4. Niech n – liczba wierzchołków wielokąta, a $n–1$ i $n–2$ to liczby wierzchołków powstałych części. Jeśli prosta cięcia przechodziła przez dwa wierzchołki, to $(n–2) + (n–1) = n+2$, skąd $n=5$. Jeśli prosta cięcia przechodzi przez jeden wierzchołek i przecina jeden z boków, to $(n–2) + (n–1) = n+3$, skąd $n=6$. Jeśli prosta cięcia nie przechodzi przez wierzchołki, to $(n–2) + (n–1) = n+4$, skąd $n=7$. Jeśli porządek nie musi być taki, jak na początku ustaliliśmy, to dla czworokąta i prostej przechodzącej przez jego dwa sąsiednie boki otrzymujemy podział na trójkąt i pięciokąt, zatem $n=4$ tez spełnia warunki zadania. Dla $n=3$ i $n>4$ taki przypadek nie zachodzi.Za pominięcie jednej odpowiedzi przyznajemy 5 pkt, za dwóch 2 pkt, za trzech – 0.
5. Trzy wierzchołki sześcianu można wybrać na $\binom{8}{3} = 56$ sposobów. Trójkąty prostokątne rozpięte na wierzchołkach sześcianu powstają: równoramienne – 4 na każdej ze ścian, czyli razem jest ich $6\cdot 4=24$ oraz nierównoramienne, zawierające krawędź i przekątną sześcianu – 2 przy każdej krawędzi, czyli razem jest ich $2\cdot 12 = 24$. Zatem prawdopodobieństwo wybrania trójkąta prostokątnego wynosi $48/56 =6/7$.
6. $W(x)$ jest wielomianem stopnia k, więc $W(x) = a_0 +a_1x + \ldots + a_kx^k$, a suma jego współczynników jest równa $W(1) = 1 + (4\cdot 1–1) + (4\cdot 1–1)^2 +\ldots+ (4\cdot 1–1)^k = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k$. Obliczając sumę $k+1$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymujemy $\frac{1-3^{k+1}}{1-3} = \frac{3^{k+1}-1}{2}$.
7. Suma kątów zewnętrznych wielokąta wynosi 360°, więc co najwyżej 3 spośród nich mogą być rozwarte, a tym samym co najwyżej 3 kąty wewnętrzne mogą być ostre. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odjąć 2 pkt.
8. Równoważnie otrzymujemy $(a^2x^2+2axy+y^2) + (a^2y^2+2axy+x^2) – 2(ay+y) – 2(ay+x)+ 2 = 0$, czyli $(ax+y)^2 – 2(ax+y) + 1 + (ay+x)^2 – 2(ay+x) + 1 = 0$, czyli dalej $(ax+y–1)^2 + (ay+x–1)^2 = 0$ Suma liczb nieujemnych jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy obie są zerami, czyli $ax+y = 1$ i $x+ay = 1$. Ten układ równań przedstawia dwie proste: $y = -ax+1$ i $y = {}^{-1}/_{a}x+{}^{1}/_{a}$. Aby rozwiązanie były jedyne (pierwiastkiem była jedna para liczb), proste nie mogą być równoległe, czyli musi być $a \neq 1$ i $a\neq -1$. Za odpowiedź bez uzasadnienia, że innych możliwych a nie ma, przyznajemy 2 pkt, za uzasadnienia tylko jednego z warunków przyznajemy 4 pkt.
9. Niech $x_0 \in$ R. Rozważmy ciągi zbieżne do x_0: $\{w_n\}$ liczb wymiernych oraz $\{u_n\}$ liczb niewymiernych. Takie ciągi zawsze istnieją (uczeń powinien uzasadnić ten fakt na prośbę jury, jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 2 pkt). Zachodzą wówczas warunki: $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty}(w_n \cdot D(w_n)) = \lim_{n\to\infty}(w_n)\cdot \lim_{n\to\infty} D(w_n) = x_0 \cdot 1 = x_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty}(u_n \cdot D(u_n)) = \lim_{n\to\infty}(u_n)\cdot \lim_{n\to\infty} D(u_n) = x_0 \cdot 0 = 0$ (stosujemy twierdzenie o granicy iloczynu ciągów zbieżnych). Stąd wynika, że dla $x_0\neq 0$ granica f w punkcie x_0 nie istnieje. Natomiast dla $x_0= 0$ mamy $f(x_0) = 0\cdot D(0) = 0$ oraz dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 zachodzi $0 \le |f(x_n)| = |x_n\cdot D(x_n)| = |x_n|\cdot|D(x_n)| \le |x_n|$, skąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, zatem f jest ciągła w punkcie $x_0= 0$ i tylko w nim.
10. Niech O środek okręgu opisanego na trójkącie. Stosujemy rachunek na wektorach. Zachodzi $0 \le (\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC})^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)$, skąd $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \ge -3/2$. I wartość ta jest przyjmowana dla $\boldsymbol{CO} = \boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}$ (za brak tej uwagi odjąć 2 pkt).



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

1. Dwie brygady kładą kabel na pustyni w kierunku N-S. O 6.00 wyruszają z obozowiska. Pierwsza jedzie jaguarem z prędkością [18, 24] km/h, a druga – gepardem z prędkością [36, -16] km/h. O 6:30 brygada z geparda przerywa podróż i zaczyna kłaść kabel w kierunku północnym. Załoga jaguara jedzie dalej ze swoją prędkością, aż znajdzie się dokładnie na północ od poprzedniej, i wtedy zaczyna pacę. Każda ekipa kładzie średnio 800 m kabla na godzinę. Jaka odległość dzieli brygady w porze lunchu o 11.30?

2. Dany jest układ równań: $p + 2q + 3r + 4s = k$ oraz $4p = 3q = 2r = s$. Jaka jest najmniejsza wartość k, dla której p, q, r, s są dodatnimi liczbami całkowitymi?

3. Na szachownicy 8×8 postawiono 6 pionków na białych polach i 7 pionków na polach czarnych. Ruch gracza polega na jednoczesnym przestawieniu czterech dowolnych pionków, każdego na dowolne sąsiednie pole poziomo lub pionowo. Czy można tak wykonywać ruchy, by po pewnej ich liczbie na białych polach stało 7 pionków, a na czarnych 6?

4. Szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm napełniono wodą. Następnie przechylono ją tak, że $^1/_3$ wody wylała się. Pod jakim kątem przechylono szklankę?

5. W trójkącie ABC o polu 8 poprowadzono równolegle do boku AC odcinek DE. Pole trójkąta DEC wynosi 2. Oblicz stosunek AC do DE.

6. Na stacji benzynowej powstała kolista plama oleju silnikowego, której promień rósł w tempie 2 cm na minutę. W jakim tempie rosła powierzchnia tej plamy, gdy promień osiągnął niebezpieczną granicę 60 cm?

7. Rozłóż wielomian x^6+1 na czynniki nierozkładalne.

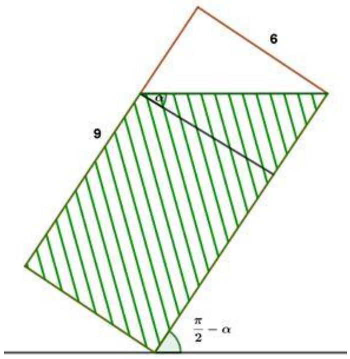
8. Niech X_1, X_2 i X_3 oznaczają rzuty prostokątne środka ciężkości M trójkąta prostokątnego (z kątem prostym w C) odpowiednio na boki BC, AC i AB. Wykaż, że $P_1 = P_2 + P_3$, gdzie P_1, P_2 i P_3 oznaczają odpowiednio pola trójkątów MX_1X_2, MX_2X_3 i MX_1X_3.

9. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = xD(x)$, gdzie $D(x)$ jest funkcją Dirichleta, która dla argumentów niewymiernych przyjmuje wartość 0, a dla wymiernych – wartość 1.

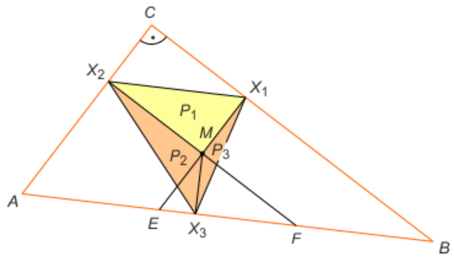
10. Wykaż, że w trójkącie ABC prawdziwa jest nierówność: $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 9R^2$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

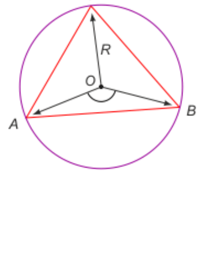
1. Umieśćmy początek układu współrzędnych w miejscu obozowiska. Po 30 min brygada z geparda przemieści się o wektor [18, -8], więc znajdzie się w punkcie o współrzędnych (18, -8) i tam zacznie pracę. Brygada z jaguara znajdzie się na północ od nich po godzinie jazdy, czyli o 7. Będzie wtedy w punkcie (18, 24) i tam zacznie pracę. O tej porze pierwsza brygada położy już 400 m kabla i będzie w odległości 31 km i 600m. Do przerwy pozostaną 4,5 godziny. W tym czasie obie brygady położą jeszcze $4{,}5\cdot 1600 = 7200$ metrów kabla i o tyle bliżej będą o 11:30, czyli w odległości 24 km i 400 m.
2. Z II warunku wynika, że $p<q<r<s$ oraz że s jest wielokrotnością 2, 3 i 4, więc najmniejsze możliwe s to 12, co daje $p=3$, $q=4$ i $r = 6$. Wówczas z I warunku $k=77$.
3. Każdy z pionków przestawianych w danym ruchu zmienia kolor pola, na którym stoi. Załóżmy, że w pewnym momencie mamy b pionków na polach białych i c na czarnych, i wykonujemy ruch, w którym przestawiamy x pionków białych i $4–x$ czarnych, gdzie $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Wtedy na polach białych znajdzie się $b–x+(4–x) = b+4–2x$ pionków, a na polach czarnych $c–(4–x)+x = c–4+ 2x$ pionków. Wynika stąd, że w każdym ruchu liczby pionków na polach białych i czarnych zachowują swoją parzystość (zmieniają się o liczbę parzystą). Zatem nigdy nie dojdziemy do sytuacji, w której parzystość ta się zamieni i będzie 7 pionków na polach białych i 6 na czarnych.



4. Objętość szklanki wynosi $V = 81\pi$. Objętość wylanej wody V_1 równa jest połowie objętości walca o promieniu 3 i wysokości x, skąd $V_1 = {}^1/_2\, 9\pi x = {}^1/_3 V = 27\pi$, czyli $x=6$. Widać więc, że przekrój walca jest kwadratem i $\alpha = 90°–\alpha = 45°$, zatem szklankę pochylona pod kątem 45° do poziomu.
5. Niech $|AC| = k|DE|$ (gdzie $k>1$). Trójkąty DEC i ACE mają tę samą wysokość i ACE ma k razy dłuższą podstawę, więc pole ACE wynosi $2k$. Trójkąty ABC i DEC są podobne w skali k, stosunek ich pól jest kwadratem skali podobieństwa, więc pole DEC wynosi $8/k^2$. Mamy równanie $2+2k+8/ k^2 = 8$ równoważne równaniu $2k^3 – 6k^2 + 8=0$, co daje dalej $k^3 – 3k^2 +4 = (k–2)^2(k+1)=0$. Jedynym jego pierwiastkiem większym od 1 jest $k=2$.
6. Tempo zmiany wielkości, to pochodna tej wielkości po czasie. Wiadomo, że $r'(t) = 2$ oraz $p(r) = \pi r^2$. Obliczamy $P'(t)$ jako pochodną funkcji złożonej $P(r(t))$. $P'(t) = 2\pi r(t) \cdot 2$. Dla $r=60$ pole zmienia się w tempie $4\pi\cdot 60 = 240\pi$ cm^2/min.
7. Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów $x^6+1 = (x^2)^3+1^3 = (x^2+1)(x^4–x^2+1) = (x^2+1)(x^4+2x^2+1–3x^2) = (x^2+1)[(x^2+1)^2–(\sqrt{3}x)^2] = (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2–\sqrt{3}x+1)$. Te są już nierozkładalne nad R (mają ujemny wyróżnik).
8. Niech E i F będą punktami symetrycznymi do X_1 i X_2 względem środka ciężkości M. Punkty E i F leżą na przeciwprostokątnej (za brak uzasadnienia odjąć 2 pkt). Wówczas $P_1 = P_{\Delta EFM} = P_{\Delta EX3M} + P_{\Delta MX3F} = P_{\Delta X3MX1} + P_{\Delta X3MX2}$ (trójkąty o równych podstawach i wspólnej wysokości na nie opuszczonej) co daje $P_3 + P_2$.



9. Na poprzednim meczu pokazaliśmy, że funkcja f jest ciągła tylko w punkcie 0, zatem tylko w tym punkcie może być różniczkowalna. Uczeń może skorzystać z tej własności lub ją ponownie wykazać:
Niech $x_0 \in$ R, rozważamy ciągi zbieżne do x_0: $\{w_n\}$ liczb wymiernych oraz $\{u_n\}$ liczb niewymiernych, zachodzą warunki:
$\lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty}(w_n \cdot D(w_n)) = \lim_{n\to\infty}(w_n)\cdot \lim_{n\to\infty} D(w_n) = x_0 \cdot 1 = x_0$ oraz
$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty}(u_n \cdot D(u_n)) = \lim_{n\to\infty}(u_n)\cdot \lim_{n\to\infty} D(u_n) = x_0 \cdot 0 = 0$. Zatem dla $x_0\neq 0$ granica f w x_0 nie istnieje, a dla $x_0= 0$ mamy $f(x_0) = 0\cdot D(0) = 0$ oraz dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 zachodzi $0 \le |f(x_n)| = |x_n\cdot D(x_n) = |x_n|\cdot|D(x_n)| \le |x_n|$, skąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, więc f jest ciągła w $x_0= 0$. Ponieważ
$\frac{f(w_n)-f(0)}{w_n-0} = \frac{w_n D(w_n)-0\cdot D(0)}{w_n} = D(u_n) = 0$ i $\frac{f(u_n)-f(0)}{u_n-0} = \frac{u_n D(u_n)-0\cdot D(0)}{u_n} = D(w_n) = 1$, nie istnieje granica ilorazu różnicowego f w punkcie $x_0 = 0$, czyli funkcja f nie ma pochodnej w tym punkcie.
10. .Niech O – środek okręgu opisanego na trójkącie i miarach kątów α, β, γ. Stosujemy rachunek na wektorach, $\mathbf{AB} = \mathbf{OB}–\mathbf{OA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{OC}–\mathbf{OB}$ i $\mathbf{CA} = \mathbf{OA}–\mathbf{OC}$. Zatem $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = \mathbf{AB}^2 + \mathbf{BC}^2 + \mathbf{CA}^2 = (\mathbf{OB}–\mathbf{OA})^2 + (\mathbf{OC}–\mathbf{OB})^2 + (\mathbf{OA}–\mathbf{OC})^2 = \mathbf{OB}^2 – 2\mathbf{OB}\bullet\mathbf{OA} + \mathbf{OA}^2 + \mathbf{OC}^2 – 2\mathbf{OC}\bullet\mathbf{OB} + \mathbf{OB}^2 + \mathbf{OA}^2 – 2\mathbf{OC}\bullet\mathbf{OA} + \mathbf{OC}^2 = 6R^2 – 2R^2(\cos 2\gamma+\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$. Zachodzi też $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge -3/2$ (pokazane na poprzednim meczu). Uczeń Mozę z tego skorzystać lub wykazać od nowa na podstawie nierówności $0 \le (\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{OC})^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)$.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

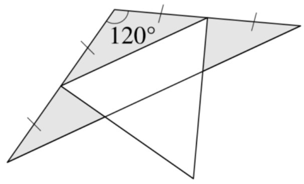
1. Wilhelm Tell strzelał z odległości 15 metrów do jabłka o średnicy 6 cm ustawionego na głowie własnego syna. Gdyby strzelił dokładnie poziomo, trafiłby w sam środek jabłka. Jednak ręka mu drgnęła – skierował łuk pod kątem $\alpha = 0{,}1°$ w dół. Jak skończyła się ta historia?

2. Nie wykonując żadnych rachunków na liczbach, podaj wartość funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$ w punkcie 2019 z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

3. W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 2θ wpisano półokrąg o promieniu 1, tak że jego średnica zawierała się w podstawie trójkąta, a łuk był styczny do ramion. Jakie jest pole tego trójkąta?

4. Mając dany odcinek jednostkowy oraz odcinki o długościach a i b, wykreśl odcinek o długości $\frac{a^4}{b^3}$.

5. Nałożono jeden na drugi dwa trójkąty: równoramienny o kącie 120° i równoboczny o polu 36, którego dwa wierzchołki leżą na środkach ramion drugiego trójkąta. Oblicz zacieniowane pole.



6. W południe na radarze żaglowca zauważono 20 km na północ wodolot. Żaglowiec płynie na wschód z prędkością 20 km/h, a wodolot – na południe z prędkością 40 km/h. Jest gęsta mgła i widoczność wynosi zaledwie 10 km. O której godzinie będą najbliżej? Czy pasażerowie wodolotu będą mogli zobaczyć żaglowiec?

7. Wewnątrz n-kąta wypukłego (n>4) dane są dwa punkty. Wykaż, że spośród wierzchołków wielokąta da się wybrać cztery tak, by otrzymany czworokąt zawierał te punkty w swoim wnętrzu.

8. Karmelita Śmigła przebiegła 100 m w czasie 10 s. Jaką osiągnęła największą prędkość, jeśli przez 30 m rozpędzała się jednostajnie, a resztę dystansu przebiegła ze stałą prędkością? Czy biegnąc w terenie zabudowanym powinna zapłacić mandat?

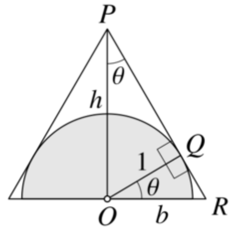
9. Złośliwa czarownica rzuciła urok na jedną z 1000 beczek z winem w piwnicy króla Artura. Po wypiciu z niej choćby kropli człowiek zzielenieje w ciągu doby. Król codziennie rano dysponuje 10 dzielnymi rycerzami gotowymi ponieść dla niego ryzyko. Jak w najkrótszym czasie możne wykryć zatrutą beczkę?

10. Dane są takie punkty C i D leżące po różnych stronach prostej AB, że proste AB i CD są prostopadłe, a ponadto $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADB|$. Czy stąd wynika, że trójkąty ABC i ABD mają równe pola?

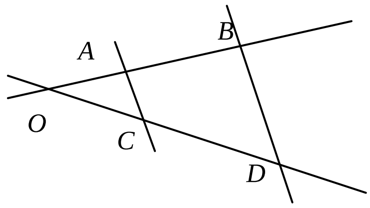
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Było o włos od tragedii. Niech graniczny kąt, gdy strzała trafi w jabłko, a nie w głowę, ma miarę α. Wówczas tg α = 3/1500 = 0,002, co daje $\alpha \approx 0{,}114$. Do wyliczenia kąta można użyć tablic lub kalkulatora. Ważne jest, aby rachunki prowadzić w stopniach.

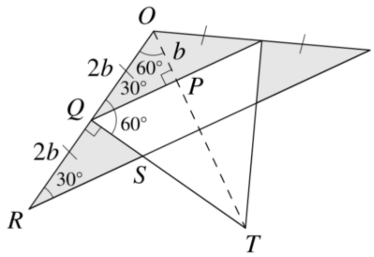
2. Mamy $f(x) = \frac{(x^2-6x+9)+1}{x-3} = \frac{(x^2-2\cdot 3x+3^2)}{x-3} + \frac{1}{x-3} = x-3+\frac{1}{x-3}$, stąd $f(2019)$ = 2016+1/2016 $\approx$ 2016 (pierwsza cyfra znacząca pojawia się na 4 miejscu po przecinku i jest mniejsza niż 5, bo 2016 > 2000 i 1:2000 = 0,005). Za brak argumentu o zaokrągleniu odejmujemy 5 pkt.



3. Niech O będzie środkiem półokręgu, a Q.- punktem styczności z ramieniem. Wysokość trójkąta oznaczmy h, a długość podstawy $2b$. Trójkąty prostokątne POR RQO i OQP są podobne. Z trójkąta ROQ cos $\theta = {}^1/_b$, więc $b = {}^1/_{\cos\theta}$. Z trójkąta OPQ sin$\theta = {}^1/_h$, wiec $h = {}^1/_{\sin\theta}$. Pole trójkąta wynosi $b\cdot h = {}^1/_{\sin\theta\cos\theta}$.



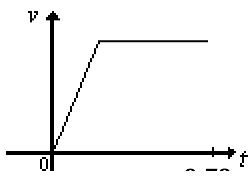
4. Wystarczy konstrukcja odcinka o długości będącej iloczynem oraz ilorazem długości danych odcinków. Obie wykonamy za pomocą twierdzenia Talesa. Mamy $|OA|:|AB.| = |OC|:|CD|$. Stąd $|CD| = |OC|\cdot|AB|/|OA|$. Aby uzyskać iloczyn danych długości x i y, na jednej półprostej odkładamy odcinek jednostkowy OA, za nim odkładamy x jako AB, a na drugiej y jako OC. Prowadzimy prostą AC oraz prostą do niej równoległą przez punkt B. W przecięciu z drugą półprostą otrzymujemy D i $|CD| = xy$. Aby uzyskać iloraz postępujemy analogicznie: Odkładamy y jako OA, za nim odcinek jednostkowy jako AB, a na drugim ramieniu x jako OC. Ta sama konstrukcja daje $|CD|=x/y$. Szukaną konstrukcję wykonujemy np. w takich 5 krokach: $a\cdot a$, $b\cdot b$, a^2/b^2, a^2/b i na końcu iloczyn tych ostatnich.



5. OT jest osią symetrii całej figury. Zacieniowane pole składa się z czterech trójkątów prostokątnych, z których każdy jest połową trójkąta równobocznego, ale nie są to trójkąty przystające (za ten błąd odejmujemy 6 pkt). Niech OP ma długość b, wtedy $|OQ| =2b$ i $|QP| = \sqrt{3}b$. Trójkąty QSR i OPQ są podobne w skali $|QR|:|QP| = {}^{2b}/_{\sqrt{3}b}$ = $2/\sqrt{3}$, więc $|QS| = {}^2/_{\sqrt{3}}|OP| = {}^{2b}/_{\sqrt{3}}$. Zacieniowane pole wynosi więc $2P_{OPQ}+2P_{QSR}$ = $b\cdot\sqrt{3}b + {}^{2b}/_{\sqrt{3}}\cdot 2b = 7b^2/\sqrt{3}$. Trzeba jeszcze wyliczyć b. Trójkąt QPT też jest połową równobocznego i $|PT| = \sqrt{3}|QP| = 3b$. Jego pole to $|QP|\cdot|PT| = \sqrt{3}b\cdot 3b = 3\sqrt{3}b^2 = 36$, czyli $b^2/\sqrt{3} = 4$, więc zacieniowane pole wynosi $7\cdot 4 = 28$.

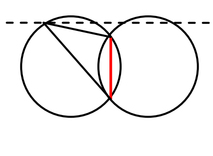
6. Niech żaglowiec w południe znajduje się w punkcie (0, 0). Po czasie t (w godzinach) będzie w punkcie $(20t, 0)$. Wodolot startuje z punktu (0, 20) i po czasie t będzie w punkcie $(0, 20–40t)$. Odległość między statkami wynosi $d(t) = \sqrt{(400t^2+(20–40t)^2)}$. Ponieważ pierwiastek jest rosnący, minimum tej funkcji będzie przyjęte w tym samym miejscu, co minimum funkcji pod pierwiastkiem, czyli $d^2(t) = 2000t^2–1600t+400$. Wierzchołek tej paraboli ma współrzędne (0,4, 80) zatem najbliżej statki będą po 0,4 godziny, czyli 24 minutach. Pasażerowie zobaczą żaglowiec bo odległość wyniesie wówczas $\sqrt{80}<10$. Za szukanie minimum funkcji z pierwiastkiem odejmujemy 3 pkt.

7. Niech prosta przechodząca przez wybrane punkty przecina boki AB i CD wielokąta. Wówczas A, B, C i D są szukanymi wierzchołkami. Jeśli prosta przecina bok AB i przechodzi przez wierzchołek C, to do A, B, C dodajemy dowolny wierzchołek jako D. Jeśli prosta przechodzi przez wierzchołki A i B, to nie są one kolejne i wtedy do A i B dodajemy dowolny wierzchołek leżący między A i B jako C oraz dowolny leżący między B i A (idąc po obwodzie w tym samym kierunku, co poprzednio) jako D.



8. Droga to pole pod wykresem prędkości w zależności od czasu. Ruch Karmelity przedstawia diagram. Niech T oznacza czas rozbiegu a V maksymalną prędkość. Zachodzi wtedy ½ VT=30 oraz $V(10–T)$=70. Podstawiając VT=60, otrzymamy 10V=60+70=130, czyli V=13 m/s $\approx$ 46,8 km/h. Karmelita może bezpiecznie biegać po ulicach.

9. Można to zrobić w 3 dni (I każdy pije ze 100 beczek, II każdy pije z 10 podejrzanych beczek, III każdy pije z 1 podejrzanej beczki). Za taką odpowiedź przyznajemy 5 pkt. (za dłuższe rozwiązania 0 pkt). Wystarczy 1 dzień. Numerujemy beczki w systemie dwójkowym, numery będą co najwyżej 10-cyfrowe, bo 2^{10}>1000. Numerujemy rycerzy i rycerz o numerze i pije z każdej beczki, która ma cyfrę 1 na i-tym miejscu. Kiedy już zzielenieją, ustawiamy ich kolejno i odczytujemy dwójkowo numer zatrutej beczki (biali to 0, zieloni to 1).



10. Nie. Rozważane trójkąty mają wspólną podstawę AB, ale opuszczone na nią wysokości mogą mieć różne długości. Tak jest, jeśli kąt CAB jest rozwarty. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku wynika, że wszystkie punkty P, z których widać odcinek AB pod ustalonym kątem leżą na łuku okręgu i jego symetrycznym obrazie względem AB. Na linii przerywanej punkty C i D spełniające warunki zadania można wybrać niesymetrycznie.