# DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
# EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

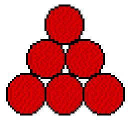
## SP MŁODZICY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

## MECZ I

1) Kierownik wycieczki zarezerwował w hotelu nocleg ze śniadaniem dla 100-osobowej grupy. Poinformował, że 78 osób w grupie pija na śniadanie herbatę, 71 kawę, a 48 osobom jest to obojętne. Właściciel hotelu powiedział, ze to niemożliwe. Kto miał rację?

2) W trójkącie długości dwóch boków wynoszą 6,31 m i 0,82 m. Ile wynosi długość trzeciego boku, jeżeli wiadomo, że wyraża się całkowitą liczbą metrów?

3) Jacek wysypał woreczek jednakowych szklanych kulek i ułożył je w pełny trójkąt o równych bokach. Okazało się, że wzdłuż każdego boku zmieściło się 37 kulek. Ile kulek miał Jacek w woreczku?



4) Jeżeli między cyfry pewnej liczby dwucyfrowej wpiszemy cyfrę 0, to liczba ta wzrośnie dziewięciokrotnie. Jaka to liczba?

5) Prostokąt, którego boki mają długości 8 cm i 18 cm, podziel na dwie części tak, aby można z nich było złożyć kwadrat.

6) W torebce jest mniej niż 100 cukierków. Ile ich jest dokładnie, jeżeli wiadomo, że można je podzielić po równo między piątkę albo szóstkę dzieci. Natomiast gdyby je podzielić między siedmioro dzieci, to jedno z nich dostałoby o 3 cukierki mniej od każdego z pozostałych.

7) Z kilku kostek do gry sklejono najmniejszy możliwy sześcian. Suma oczek na wszystkich widocznych ściankach była o 8 większa niż na ściankach niewidocznych. Ile oczek było na ściankach niewidocznych?

8) Janek zmierzył dokładnie wszystkie kąty pewnego trójkąta, zaokrąglił ich miary do pełnych stopni i dodał. Jaki wynik otrzymał?

9) Liczby $p, q, r, s$ spełniają następujące warunki: $p + 2q + 3r + 4s = k$ oraz $4p = 3q = 2r = s$. Jaka jest najmniejsza wartość $k$, dla której $p, q, r, s$ są dodatnimi liczbami całkowitymi?

10) Kąt zewnętrzny wielokąta jest kątem przyległym do kąta wewnętrznego. Ile wynosi suma kątów zewnętrznych 12-kąta wypukłego?

**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**
**EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019**
**SP MŁODZICY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I**
**SZKICE ROZWIĄZAŃ**

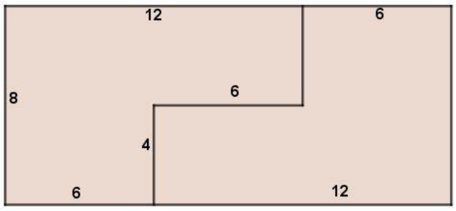
1. Właściciel hotelu miał rację, ponieważ liczba osób pijących tylko herbatę jest równa 78–48=30, pijących tylko kawę 71–48=23. Zatem wszystkich osób na śniadaniu byłoby 30+23+48 = 101.

2. Niech $a$ = 6,31, $b$ = 0,82, a $c$ jest liczbą całkowitą. Z warunku trójkąta wynikają trzy nierówności: $c$ < 6,31+0,82 = 7,13; 0,82 < 6,31+$c$ i 6,31 < 0,82+$c$. Z ostatnich dwóch warunków mamy $c$>5,49. Szukamy więc liczb całkowitych między 5,49 i 7,13. Trzeci bok może być równy 6 m lub 7 m. Za podanie tylko jednej możliwości przyznajemy do 5 pkt.

3. Aby ułożyć z kulek trójkąt równoboczny, układamy kolejno w rzędach 1, 2, 3 kulki aż do 17, czyli Jacek miał 1+2+3+… +37 kulek. Zawodnik powinien pokazać sprytny sposób obliczenia tej sumy, korzystający z przemienności mnożenia, np. ustawić liczby w 18 par po 39 kulek: 2+37, 3+36, …, 18+21, 19+20 oraz dodać jeszcze 1. To daje 18·39+1 = 703 kulki. Za rachunki „na piechotę” lub na kalkulatorze odejmujemy 4 pkt.

4. Niech $x$ i $y$ to cyfry odpowiednio dziesiątek i jedności szukanej liczby. Wynosi ona 10$x$+$y$, a liczba a trzycyfrowa to 100$x$+$y$, co daje 100$x$+$y$ = 90$x$+9$y$, skąd mamy 10$x$ = 8$y$, czyli 5$x$ = 4$y$. jednocyfrowe $y$ musi dzielić się przez 5, zatem jest równe 5 lub 0 (za nierozważenie 0 odejmujemy 4 pkt). W pierwszym wypadku $x$=4, w drugim nie dostaniemy liczby dwucyfrowej, zatem szukana liczba to 45.

5. Pole kwadratu musi wynosić 8·18 = 144, czyli jego bok ma 12 cm. Możliwe rozwiązanie przedstawia rysunek.




6. Skoro liczba cukierków jest podzielna przez 5 i przez 6, to jest podzielna przez 30 (bo 5 i 6 są względnie pierwsze – za opuszczenie tego argumentu odejmujemy 2 pkt). Cukierków w torebce jest więc 30, 60 lub 90. Z tych liczb tylko 60 spełnia warunki zadania, gdyż 60+3 jest podzielne przez 7.

7. Sześcian sklejono z 8 kostek. Niech $x$ oznacza sumę oczek na ściankach widocznych. Wówczas $x$–8 to suma oczek na ściankach niewidocznych, a suma wszystkich oczek wynosi 8 · (1+2+3+4+5+6) = 168. Zatem $x$ + ($x$–8) = 168, skąd $x$ = 88, zatem suma oczek na ściankach niewidocznych wynosi 80.

8. Niech dokładne miary kątów wynoszą $p$,$a$, $q$,$b$ i $r$,$c$, gdzie $p$, $q$ i $r$ są częściami całkowitymi, a $a$, $b$, $c$ częściami ułamkowymi liczb. Ponieważ suma miar kątów jest całkowita, $a$+$b$+$c$ jest całkowite i nie przekracza 3. Mogą więc zajść następujące przypadki: a) $a$+$b$+$c$ = 0, wówczas $p$+$q$+$r$ = 180; b) $a$+$b$+$c$ = 1, wówczas $p$+$q$+$r$ = 179; c) $a$+$b$+$c$ = 2, wówczas $p$+$q$+$r$ = 178. W a) nie ma zaokrągleń i uzyskujemy wynik **180**. W b) może nie być zaokrągleń, np. $p$,4, $q$,4, $r$,2 i wynik wyniesie **179**, może być jedno, np. $p$,5, $q$,4, $r$,1 i wynik wyniesie **180** lub mogą być dwa, np. $p$,5, $q$,5, $r$,0 i wynik wyniesie **181**. Trzech być nie może, bo 0,5+0,5+0,5>1. W c) mogą być dwa zaokrąglenia, np. $p$,9, $q$,9, $r$,2 i wynik wyniesie **180**, albo trzy zaokrąglenia, np. $p$,7, $q$,7, $r$,6 i wynik wyniesie **181**. Mniej niż dwóch zaokrągleń być nie może, bo 0,5+0,4+0,4<2. Zatem możliwe wyniki Janka to 179, 180 lub 181. Za odpowiedz bez uzasadnienia, że innych wyników być nie może, przyznajemy 5 pkt. Za pominięcie któregoś przypadku, przyznajemy 0.

9. Z II warunku wynika, że $p$<$q$<$r$<$s$ oraz że s jest wielokrotnością 2, 3 i 4, więc najmniejsze możliwe $s$ to 12, co daje $p$=3, $q$=4 i $r$ = 6. Wówczas z I warunku $k$=77.

10. Prowadząc przekątne z jednego wierzchołka 12-kąta, dzielimy go na 10 trójkątów, każdy z sumą kątów wewnętrznych 180°. Kąty tych trójkątów dają sumę kątów wewnętrznych 12-kąta i wynosi ona 10·180° = 1800°. Każdy kąt zewnętrzny dopełnia odpowiedni kąt wewnętrzny do 180°, zatem suma kątów zewnętrznych wyniesie 12·180° – 10·180° = 2·180° = 360°.

**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**
**EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019**

**SP MŁODZICY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA**

**MECZ II**

1) Ile co najmniej monet trzeba mieć, aby wypłacić kwotę 99,99 zł, nie używając banknotów?

2) Z cyfr 0, 1, 3 i 9 utworzono wszystkie liczby czterocyfrowe o tej własności, że każda cyfra występowała w liczbie tylko raz i liczba była podzielna przez 3. Ile tych liczb utworzono?

3) Trzech chłopców kupiło 14 ciastek. Andrzej kupił 2 razy mniej niż Cezary, a Bartosz więcej niż Andrzej, ale mniej niż Cezary. Ile ciastek kupił każdy z chłopców?

4) W pewnej liczbie naturalnej zamieniono miejscami cyfrę dziesiątek i jedności, a wówczas wartość tej liczby zmalała o 10%. Jak to liczba?

5) Czy liczba $6^5 \cdot 24^3$ jest kwadratem jakiejś liczby naturalnej?

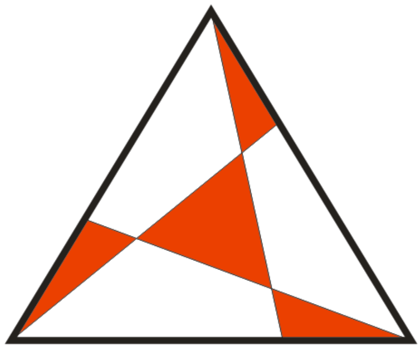
6) Jacek wysypał woreczek jednakowych szklanych kulek i ułożył z nich pełny trójkąt o boku z 11 kulek. Zostało mu jeszcze trochę kulek i wystarczyło ich na drugi trójkąt o boku z 10 kulek. Ile kulek miał Jacek w woreczku?

7) Dla „długich" liczb cechę podzielności przez 9 można stosować wielokrotnie, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka jest najmniejsza liczba, dla której potrzebne są trzy powtórzenia?

8) Mówimy, że dwie wielkości *P* i *Q* zmieniające się w czasie są proporcjonalne, jeśli jedna z nich stale przyjmuje taką wartość, jak druga pomnożona przez jakąś stałą liczbę. Mówimy, że wielkości *P* i *Q* są odwrotnie proporcjonalne, jeśli jedna z nich stale przyjmuje taką wartość, jaką daje pewna stała liczba podzielona przez tę drugą wielkość. Podczas elektrolizy ilość materii wydzielającej się na elektrodzie jest proporcjonalna do natężenia prądu, natężenie prądu jest proporcjonalne do przewodności elektrolitu, przewodność jest proporcjonalna do koncentracji elektrolitu, a koncentracja przy danej ilości materii jest odwrotnie proporcjonalna do objętości rozczynnika. Jak wyraża się zależność pomiędzy ilością materii wydzielanej na elektrodzie a objętością rozczynnika?

9) Ile różnych dzielników ma liczba 86400?

10) Matlandia ma flagę państwową w kształcie trójkąta równobocznego. Flaga jest biało-czerwona jak na rysunku (czerwony skserowany jest na szaro). Odcinki, które wychodzą z wierzchołka, spadają na przeciwległy bok w $^1/_3$ jego długości. Jaką część pola flagi stanowi kolor czerwony?



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**
**EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019**
**SP MŁODZICY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II**
**SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Monet o jak najwyższym nominale trzeba użyć jak najwięcej. Za brak tego stwierdzenia i podanie samej poprawnej odpowiedzi przyznajemy 5 pkt. Kwotę 99 zł 40 groszy otrzymamy, wypłacając $19\cdot 5$zł + $2\cdot 2$ zł + $1\cdot 50$ gr + $2\cdot 20$ gr + $1\cdot 5$ gr + $2\cdot 2$ gr, czyli musimy mieć co najmniej 27 monet.

2. Takie liczby nie istnieją, ponieważ suma 0+1+3+9 = 13 nie jest liczbą podzielną przez 3.

3. Niech $a$, $b$, $c$ oznaczają liczby ciastek kupionych przez Andrzeja, Bartosza i Cezarego. Z warunków zadania mamy $a+b+c = 14$, $a<b<c$ oraz $c = 2a$, a stad $3a+b<14$ i widać, że $a<5$, bo dla $a=5$, $c=10$ i suma jest za duża. Sprawdzamy możliwe cztery przypadki (za rozpoczęcia sprawdzania zanim ustali się, że liczba tych sprawdzeń jest skończona, odejmujemy 2 pkt. Inaczej jest to szukanie na ślepo). Dla ***a*=1**, c=2 i nie ma możliwego $b$. Dla ***a*=2**, $c$=4, $b$=3 i suma jest za mała. Dla ***a*=3**, $c$ =6 i możliwe $b$ to 4 lub 5, z czego 4 daje za małą sumę, a 5 – dobrą. Dla **a=4**, $c$=8, możliwe $b$ to 5, 6 lub 7 i wszystkie dają za dużą sumę. Andrzej kupił 3 ciastka, Bartosz 5 a Cezary 6.

4. Niech $x$ i y oznaczają odpowiednio cyfry jedności i dziesiątek szukanej liczby oraz $a$ jest dowolną liczbą naturalną (za założenie, że liczba jest dwucyfrowa odejmujemy 5 pkt). Szukana liczba ma postać $100a+10y+x$. Z warunków zadania zachodzi $100a+10y+x = 0,9(100a+10y+x)$, skąd otrzymujemy $80x–100a = 91y$. Lewa strona dzieli się przez 10, więc prawa też, czyli $y = 0$, stąd $80x = 100a$, czyli $4x = 5a$. Prawa strona równania dzieli się przez 5, zatem $x$ jest równe 5 lub 0, a stąd $a = 4$ lub 0 (ten przypadek nie daje liczby dwucyfrowej). Zadanie spełnia więc tylko liczba 450.

5. Kwadrat musi dać się zapisać jako iloczyn pewnej liczby przez samą siebie. W liczbie $6^5\cdot 24^3$ występuje 5 szóstek, czyli po 5 dwójek i trójek oraz 3 dwudziestkiczwórki, czyli po 3 trójki i ósemki. Łącznie mamy w tym iloczynie 14 dwójek i 8 trójek, które można rozdzielić „po połowie”, otrzymując $(2^7\cdot 3^4)(2^7\cdot 3^4)$, co oznacza, że liczba ta jest kwadratem. Jeśli uczeń wykonuje już działania na wykładnikach, powinien umieć je uzasadnić.

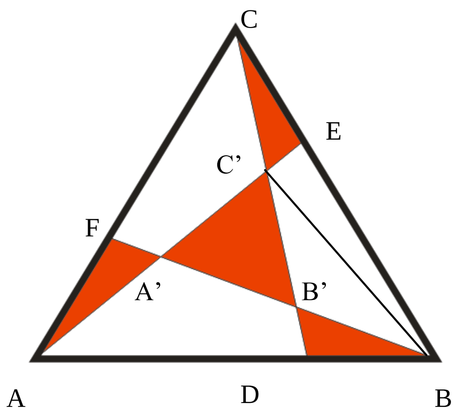
6. Z dwóch kulkowych trójkątów o kolejnych długościach boków można złożyć romb o boku takim, jak większy z trójkątów, a ten można „wyrównać” do kwadratu. Zatem Jacek miał $11^2$=121 kulek. Za przeprowadzanie rachunków dla obu trójkątów osobno (66+55) odejmujemy 2 pkt.

7. Dla liczb 1-18 wystarczy jednokrotne zastosowanie cechy podzielności (suma cyfr jest jednocyfrowa), ale już dla liczby 19 potrzebne są dwa powtórzenia. Z kolei najmniejszą liczbą, która ma sumę cyfr 19 jest liczba 199 i dla niej potrzeba trzech powtórzeń $199\to 19\to 10\to 1$. Mniejsze liczby mają sumę cyfr co najwyżej $2\cdot 9 = 18$.

8. Zależność jest odwrotnie proporcjonalna (ilość materii = const/objętość rozczynnika, gdzie const jest iloczynem wszystkich współczynników proporcjonalności – prostej i odwrotnej).

9. Rozkładamy podaną liczbę na czynniki pierwsze (stosując cechy podzielności). $86400 = 25\cdot 3456 = 25\cdot 27\cdot 128 = 2^7\cdot 3^3\cdot 5^2$. Każdy dzielnik składa się z czynników 2, 3 lub 5. Dwójka może być wzięta do iloczynu pojedynczo, dwukrotnie, …, siedmiokrotnie lub wcale, co daje 8 możliwości wpisania jej do dzielnika, trójka może być wzięta pojedynczo, podwójnie, potrójnie lub wcale (4 możliwości), a piątka pojedynczo, podwójnie lub wcale (3 możliwości). Czynniki te wybieramy dzielnika niezależnie. Wszystkich możliwości jest więc $8\cdot 4\cdot 3 = 96$.

10. Z symetrii figury równe są pola $CC'E = BB'D = AA'F$. Oznaczmy je jako $a$. Wówczas $BC'E = AB'D$ = A’CF to $2a$ (ta sama wysokość co poprzednie, ale dwa razy dłuższa podstawa). Natomiast $b$ niech oznacza pole $BB'C' = AB'A' = CA'C'$, a $x$ – pole trójkąta $A'B'C'$. Pole trójkąta $ADC$ jest 2 razy większe od $BDC$ (ta sama wysokość i dwa razy dłuższa podstawa), co daje równość $8a+2b = 5a+2b+x$, skąd $x=3a$. Także pole trójkąta $ADC'$ jest dwa razy większe od pola $BDC'$(ta sama wysokość i dwa razy dłuższa podstawa), co daje równość $x+b+2a = 2a+2b$, skąd $x=b$, czyli $b=3a$. Całe pole trójkąta $ABC$ to $21a$, a pole czerwone to $6a$, co stanowi $^2/_7$ całości.



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**
**EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019**

**SP MŁODZICY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA**

**MECZ III**

1) Kilogram cukierków kosztuje 12 zł. Jaka będzie ich cena, jeśli zdrożeją o 250%?

2) Janek ma 1000 kulek, wśród których jest dwa razy więcej kul białych niż czarnych i jedna kula w czarno-białą kratkę. Ile kul Janek powinien zamalować na czarno, aby mieć dwa razy więcej kul czarnych niż białych?

3) W trójkącie prostokątnym jeden z kątów jest dwa razy większy od drugiego. Co to za trójkąt?

4) Czy liczba $1547578087823541024^{40}$ jest podzielna przez $2^{111}$?

5) Jaką miarę ma kąt wewnętrzny sześciokąta wypukłego, jeżeli wiadomo, że każdy z pozostałych 5 kątów ma miarę 140°?

6) Jaką resztę z dzielenia przez 10 daje liczba $4^{2019} - 4$?

7) W pewnym *n*-kącie wypukłym liczba przekątnych jest 10 razy większa od liczby boków. Co to za wielokąt?

8) Symbol *n*! (czytaj: *en silnia*) oznacza iloczyn liczb całkowitych od 1 do *n*. Która z liczb jest większa: 100! czy $100^{45}$?

9) Jaka liczba znajduje się na setnym miejscu w ciągu 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 ...?

10) Zapis $|a–b|$, który czytamy: *wartość bezwzględna z a minus b*, oznacza odległość liczb *a* i *b* na osi liczbowej. Znajdź wszystkie wartości *x*, które spełniają równanie: $|x – 2| + |x – 5| = 2$.

**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**
**EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019**
**SP MŁODZICY – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III**
**SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Wzrost ceny o 250% oznacza, podwyżka była równa 2 i pół ceny wyjściowej, czyli 12·2,5 = 30 zł. Nowa cena wynosi 12+30 = 42 zł.

2. Kul jednokolorowych jest 999, z czego trzecią część stanowią kule czarne. Jest ich 333, a białych 666. Wystarczy zatem połowę kul białych przemalować na czarno, a proporcje się odwrócą.

3. Niech $x$ oznacza miarę jednego z kątów ostrych. Mogą zajść dwa przypadki. 1) Miarę $2x$ ma kąt prosty, wtedy $x$=45° i trójkąt jest połową kwadratu. 2) Miarę $2x$ ma drugi kąt ostry, wtedy $3x$=90°, czyli $x$=30° i trójkąt jest połową równobocznego. Za podanie tylko jednego rozwiązania przyznajemy 4 pkt.

4. Liczba 1547578087823541024 jest podzielna przez 8 (pełne tysiące dzielą się przez 8 i trzycyfrowa końcówka liczby też). Jeśli uczeń skorzysta z cechy podzielności przez 8, powinien ją uzasadnić. Jeśli nie potrafi, odejmujemy 2 pkt. Zatem w rozkładzie liczby 1547578087823541024 na czynniki są co najmniej 3 dwójki. Ta liczba występuje w iloczynie 40 razy, zatem iloczyn zawiera co najmniej 120 dwójek, a zatem na pewno dzieli się przez iloczyn 111 dwójek.

5. Z jednego wierzchołka sześciokąta prowadzimy przekątne do pozostałych wierzchołków. Dzielą one wielokąt na 4 trójkąty, których kąty sumują się do sumy wszystkich kątów sześciokąta. Suma ta wynosi wiec z jednej strony 4·180° = 720°, a z drugiej 5·140°+$x$ = 700°+$x$. Stąd $x$ = 20°.

6. Kolejne potęgi czwórki kończą się na przemian cyfrą 4 lub 6 (należy to uzasadnić, korzystając np. z algorytmu mnożenia pisemnego – ostatnia cyfra iloczynu liczb zależy tylko od ostatnich cyfr czynników). Za podania możliwych ostatnich cyfr potęg czwórki bez uzasadnienia odejmujemy 5 pkt. 2019 jest potęgą nieparzystą, czyli kończy się na 4, a po odjęciu 4 ostatnią cyfrą jest 0, zatem liczba dzieli się przez 10.

7. Z każdego wierzchołka wychodzą ($n$–3) przekątne (do każdego innego wierzchołka z pominięciem tego wyjściowego i jego sąsiadów, do których idą nie przekątne lecz boki). Zatem wszystkich przekątnych wychodzących z wierzchołków jest $n(n–3)$, ale ponieważ każda przekątna łączy dwa wierzchołki, jest tu liczona dwukrotnie – raz przy każdym ze swoich końców. Zatem $n(n–3) = n·2·10$,czyli $n–3 = 20$, czyli $n$=23. Mamy do czynienia z 23-kątem. Jeśli uczeń skorzysta ze wzoru na liczbę przekątnych $n$-kąta, powinien go uzasadnić. Jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 4 pkt.

8. 100! = 1·2·…·10·11·…·99·100. W tym iloczynie jest 10 czynników nie przekraczających 10 i kolejnych 90 czynników większych od 10. $100^{45}$ to 10·10 występujące 45 razy, czyli to 10 mnożone przez siebie 90 razy. Zatem ta liczba ma 90 czynników równych 10, a poprzednia miała 90 czynników większych od 10, zatem była większa. Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia przyznajemy 1 pkt.

9. Jeśli w ciągu występują liczby od 1 do $n$ (każda odpowiednią liczbę razy) to wszystkie one zajmują 1+2+3+…+$n$ miejsc tego ciągu. Aby liczba miejsc była bliska 100, jej podwojenie 2·(1+2+3+…+$n$) powinno być bliskie 200. Ale 2·(1+2+3+…+$n$) = (1+2+3+…+$n$) + ($n$+…+3+2+1) = $n$·($n$+1). Iloczyn dwóch sąsiednich liczb będzie bliski 200 np. dla 13·14 = 182. Wówczas 1+2+3+…+13 = 182/2 = 91.Oznacza to, że liczby od 1 do 13 zajmują w ciągu 91 miejsc i potem na kolejnych 14 miejscach stoją czternastki, w tym także na miejscu setnym.

10. Szukamy liczb, których suma odległości od 2 i 5 jest równa 2. Nie ma takich liczb. One nie mogą być mniejsze od 2 ani większe od 5, bo wtedy już jeden składnik tej sumy przekracza 2. Natomiast liczby, które leżą w przedziale [2, 5] mają sumę odległości od końców przedziału równa długości tego przedziału, czyli 3. Innych liczb na osi nie ma.