DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1) Adam ma siedem kredek czerwonych, sześć niebieskich, pięć zielonych, pięć żółtych, sześć brązowych i siedem czarnych. Wyjmuje je z pudełka z zamkniętymi oczami. Ile co najmniej powinien ich wziąć, żeby była wśród nich przynajmniej jedna kredka każdego koloru?

2) Jaka liczba naturalna ma dokładnie 8 dzielników w tym 6 i 15?

3) W ostatni weekend października w Polsce zmienia się czas letni na zimowy. W ubiegłym roku w sobotę 26 X słońce zaszło we Wrocławiu o 16.39, a 27 X wzeszło o 5.33. Ile minut trwała ta noc?

4) W samochodzie, którym czworo sportowców wracało po zakończonych zawodach, odbyła się taka rozmowa:
- Prowadzisz za karę. - powiedział Marek siedzący obok kierowcy.
- Przecież tylko ty nie masz medalu. - zaśmiał się głos z tyłu.
- Łatwo wam mówić. W twoim finale startowało 8 zawodniczek, a w moim aż 50 osób.
- Mimo że tylko ja zdobyłem złoto, wiem, że jest mniej cenne niż brąz w pływaniu - usłyszał za plecami Tomek.
- Mam nadzieję, że Baśka nie ma mi za złe, że zdobyłem cenniejszy medal, i nie zacznie wyśmiewać się z tenisa stołowego. - mruknął pod nosem Marek.
- Nie ma co porównywać. Przełaje i szermierka to także konkurencje z różnej bajki - wtórował Karol.
Ustal, kto co trenował, jaki zdobył medal i gdzie siedział w samochodzie.

5) Pewna liczba pomnożona przez sumę swoich cyfr daje wynik 90. Jaka jest cyfra jedności tej liczby?

6) W trapezie równoramiennym dłuższa podstawa ma 18 cm. Obwód trapezu jest równy 48 cm, a jego przekątna dzieli kąt ostry na połowy. Ile wynoszą długości pozostałych boków trapezu?

7) Janek wypisał na kartce pięć liczb. Suma pierwszej, drugiej i trzeciej wynosi 8, suma drugiej, trzeciej i czwartej 9, suma trzeciej, czwartej i piątej 10, suma czwartej, piątej i pierwszej 25, a suma piątej, pierwszej i drugiej 5. Ile wynosi suma liczb wypisanych przez Janka?

8) Ile liczb można zapisać jako sumę dwóch różnych liczb naturalnych nieprzekraczających 100? Zera nie uznajemy za liczbę naturalną.

9) Pola trzech ścian prostopadłościanu wynoszą: 84, 70 i 30. Ile wynosi objętość tego prostopadłościanu?

10) Z punktu P leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego poprowadzono odcinki prostopadłe do boków trójkąta. Wykaż, że suma długości tych odcinków jest równa wysokości tego trójkąta.

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Gdyby wziął 31 kredek, mógłby nie mieć żadnej zielonej (mając wszystkie pozostałe). Ponieważ kredek zielonych (i żółtych) ma najmniej, odpowiedzią jest 32.

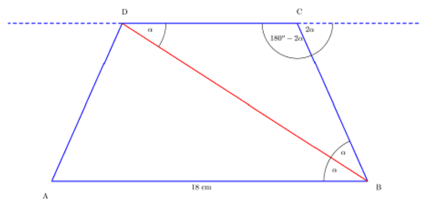
2. Rozkład szukanej liczby na czynniki pierwsze zawiera 2, 3 i 5. Jej dzielnikami są też 1 i szukana liczba oraz 6, 10 i 15, a to już daje 8 dzielników. Innych czynników w rozkładzie być już nie może, a szukana liczba to $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

3. W zwykłą noc między 16.39 a 4.39 mija 12 godzin, więc do 5.39 byłoby równo 13 godzin, czyli do 5.33 byłoby 13 godzin bez 6 minut. Ale noc z ostatniej soboty października na niedzielę jest o godzinę dłuższa (bo o godzinie 3.00 czas cofamy na 2.00), czyli noc trwała 13 h 54 min = 834 min. Za skrócenie zamiast wydłużenia nocy o godzinę odejmujemy 5 pkt.

4. Aby poprawnie przyporządkować sporty, trzeba skorzystać z obserwacji, że w finale tenisa ani szermierki nie może być więcej niż dwóch zawodników (bez tego są dwa rozwiązania i przyznajemy w tym wypadku 3 pkt). Jedyna możliwość to: Tomek - przełaje, brak medalu, kierowca, Marek - tenis stołowy, srebro, obok kierowcy, Karol - szermierka, złoto, z tyłu za kierowcą, Basia - pływanie, brąz, z tyłu za pasażerem.

5. Szukana liczba jest dwucyfrowa (za założenie tego bez uzasadnienia odejmujemy 3 pkt). Gdyby była jednocyfrowa równa a, to 90 byłoby kwadratem. Gdyby była 3-cyfrowa lub większa, to pomnożona przez sumę cyfr byłaby nadal co najmniej 3-cyfrowa. Rozłóżmy 90 na czynniki pierwsze $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Stąd widać, że istnieje pięć rozkładów, w których występuje liczba dwucyfrowa: $45 \cdot 2$, $30 \cdot 3$, $18 \cdot 5$, $15 \cdot 6$, $10 \cdot 9$. W dwóch przypadkach suma cyfr pierwszego czynnika daje drugi: 3+0=3 i 1+5=6, zatem warunki zadania spełniają liczby 30 i 15, ich cyfry jedności to 0 i 5. Za podanie jednego rozwiązania przyznajemy 4 pkt.

6. Rozwiązanie przedstawia rysunek. Przekątna dzieli kąt *ABC* na połowy (o mierze α). Kąt *BCD* ma miarę $180° - 2\alpha$ (bo jest przyległy do kąta o mierze 2α). Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie kąt *BDC* też ma miarę α. To oznacza, że *BCD* jest trójkątem równoramiennym, czyli że krótsza podstawa trapezu ma taką samą długość jak jego ramiona, tzn. $|CD|=|BC|=|AD|$. Obwód trapezu wynosi $18+3|CD|=48$, skąd pozostałe boki trapezu mają po 10 cm.



7. Po dodaniu liczb z zadania otrzymujemy trzykrotność sumy wypisanych liczb, czyli 57. Stąd szukana suma to 19.

8. Najmniejsza taka liczba to 1+2=3. A największa to 99+100=199. Każda liczb pomiędzy nimi może być zapisana jako suma $1+n$ (dla n od 2 do 99) lub jako $100+n$ (dla n od 1 do 99). Zatem liczba możliwych liczb to 199–3+1 = 197. Za pomyłkę w obliczaniu wyniku odejmujemy 5 pkt. Za odpowiedz bez uzasadnienia przyznajemy 2 pkt.

9. Oznaczmy krawędzie prostopadłościanu jako a, b, c. Niech $ab=84$, $ac=70$, $bc=30$. Objętość prostopadłościanu jest równa $V = abc = 84c$. Ale $a=70/c$ i $b=30/c$, czyli $abcc=84cc=2100$, skąd $c^2=25$, czyli $c=5$. Zatem $V = 420$.

10. Oczywiście punkt P powinien być dowolny. Za obranie szczególnego punktu przyznajemy maksymalnie 4 pkt. za całe rozwiązanie. Łączymy P z wierzchołkami trójkąta, otrzymując podział trójkąta równobocznego na trzy trójkąty. Oznaczmy prostopadłe odcinki poprowadzone do boków dużego trójkąta jako x, y, z. Są one wysokościami małych trójkątów. Obliczamy pole trójkąta równobocznego na dwa sposoby jako $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ oraz jako sumę pól mniejszych trójkątów $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$. Z przyrównania tych pól otrzymujemy $h=x+y+z$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ II

1) W pewnym sadzie za 60 kg śliwek i 210 kg jabłek trzeba zapłacić łącznie 513 zł. Czy to możliwe, żeby przy tych samych cenach owoców 45 kg śliwek i 150 kg jabłek kosztowało razem 385 zł?

2) Jaka jest najmniejsza liczba naturalna o następujących własnościach: a) jest nieparzysta, b) nie jest pierwsza, c) następna po niej liczba nieparzysta też nie jest pierwsza?

3) Dzieląc liczby 641 i 121 przez pewną liczbę, otrzymujemy reszty z dzielenia równe odpowiednio 33 i 7. Znajdź dzielną.

4) Jeśli mikołajki były w danym roku środą, to w jaki dzień tygodnia mogą wypaść 5 lat później?

5) W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 12 cm, a kąt przy podstawie ma 30°. Oblicz długość wysokości tego trójkąta opuszczonej na najdłuższy bok.

6) Przewoźnik utrzymuje komunikację pomiędzy wyspą Kastello a stałym lądem. Promy z wyspy na ląd odchodzą od 8 do 20 co 2 godziny. O tych samych porach odpływają promy z lądu na wyspę. Podróż w każdą stronę trwa 5 godzin, a załadunek pasażerów – 15 minut. Jaką najmniejszą liczbę promów przewoźnik musi przeznaczyć do obsługi tej linii?

7) Uzasadnij, że suma każdych trzech kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 3.

8) Punkty E, F, G, H leżą na bokach kwadratu $ABCD$ w taki sposób, że E w $^1/_3$ drogi z A do B, F w $^1/_3$ drogi z B do C, G w $^1/_3$ drogi z C do D, a H w $^1/_3$ drogi z D do A. Jakie jest pole czworokąta $EFGH$, jeśli $ABCD$ ma pole 2016?

9) Zbyszek zauważył, że jeśli weźmie połowę pewnej liczby i zwiększy ją o 8, otrzyma ten sam wynik, co podwajając wyjściową liczbę i zmniejszając wynik o 8. Co to za liczba?

10) Z początku układu współrzędnych, czyli z punktu (0, 0) patrzymy na wszystkie punkty (m, n) o obu współrzędnych będących liczbami naturalnymi. Ale nie wszystkie te punkty są widoczne, ponieważ niektóre ukrywają się za innymi punktami leżącymi w tym samym kierunku, ale bliżej punktu (0, 0). Na przykład punkt (2, 2) jest niewidoczny, bo kryje się za punktem (1,1). Ile z punktów o współrzędnych (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6,5) jest widocznych z początku układu współrzędnych? Czy widoczny jest stamtąd punkt (84, 45)?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Gdyby wziąć cztery razy mniej tych ilości śliwek i jabłek, które kosztują razem 513 zł, czyli gdyby wziąć 15 kg śliwek i 52,5 kg jabłek, trzeba by zapłacić 513 zł : 4 = 128,25 zł. To znaczy, że 45 kg śliwek i 157,5 kg jabłek kosztowałoby w sumie $3 \cdot 128{,}25$ zł = 384,75 zł, a przy zakupie takiej samej ilości śliwek i mniejszej ilości jabłek na pewno nie powinno się płacić więcej.

2. Najmniejsze kolejno liczby nieparzyste, które nie są pierwsze, to 9, 15, 21, 25. Trzy początkowe dają liczby pierwsze po zwiększeniu o 2, a czwarta daje liczbę złożoną, zatem 25 jest liczbą szukaną w zadaniu.

3. Jeśli od liczb 641 i 121 odejmiemy odpowiednio reszty 33 i 7, to otrzymamy 608 i 114. Można je zapisać jako $608=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot19$ oraz $114=2\cdot3\cdot19$. Widać, że jedynym wspólnym dzielnikiem obu tych liczb większym od 33 (bo dzielnik musi być większy od reszty z dzielenia) jest $2\cdot19=38$. Jest to zatem liczba, przez którą dzielono. Za odpowiedź bez uzasadnienia przyznajemy 4 pkt.

4. Rok to 52 pełne tygodnie i jeden lub dwa dni (1 w latach zwykłych i 2 – w przestępnych). W ciągu pięciu lat może zdarzyć się zero lat przestępnych (np. w latach 2098-2099-2100-2101-2102), jeden rok przestępny (np. w latach 2014-2015-2016-2017-2018) lub dwa lata przestępne (np. w latach 2012-2013-2014-2015-2016). Zatem pięć lat to 260 tygodni i 5, 6 lub 7 dni. Zatem mikołajki mogą się przesunąć o 5 lub 6 dni tygodnia albo pozostać w tym samym dniu. Czyli są możliwe trzy dni tygodnia: poniedziałek, wtorek lub środa. Za pominięcie każdej odejmujemy 4 pkt.

5. Trzeci kąt trójkąta ma 120°, więc naprzeciw niego leży najdłuższy bok. Z największego kąta opuszczamy wysokość. Dzieli ona trójkąt na dwa trójkąty prostokątne o kątach 30° i 60°, a zatem będące połówkami trójkąta równobocznego o boku 12 cm. Dorysowana wysokość jest połówką boku tego trójkąta, więc ma 6 cm.

6. Potrzebnych jest 6 promów (3 promy zaczynają z wyspy, a 3 z lądu). Ich rozkład jazdy jest następujący: 8w-14l-20w, 10w-16l, 12w-20l, 8l-14w-20l, 10l-16w, 12l-18w.

7. Liczba nieparzysta to liczba parzysta (podzielna przez 2) powiększona o 1. Zatem możemy ogólnie zapisać ją jako $2k+1$, gdzie k jest naturalne. Poprzednia nieparzysta jest o 2 mniejsza, więc wynosi $2k-1$, a następna nieparzysta jest o 2 większa, więc wynosi $2k+3$. Suma tych liczb to $2k-1+2k+1+2k+3 = 6k+3$, a to jest liczba, która dzieli się bez reszty przez 3 (daje wynik całkowity z dzielenia równy $2k+1$). Za sprawdzenie na różnych przypadkach przyznajemy 3 pkt.

8. Podzielmy kwadrat *ABCD* na 9 jednakowych kwadratów o 3 razy krótszym boku. Wtedy czworokąt *EFGH* powstaje przez odcięcie z wyjściowego kwadratu czterech identycznych trójkątów prostokątnych (o przyprostokątnych 2×1), z których można złożyć dwa prostokąty 2×1, a zatem wielkości 4 małych kwadratów. Na czworokąt *EFGH* zostaje więc 5 z 9 kwadratów, więc jego pole to 5/9 z 2016 = 1120.

9. Treść zadania przedstawia równanie $\frac{1}{2}x+8 = 2x-8$, co po podwojeniu daje $x+16 = 4x-16$, czyli $3x=32$, więc $x=10\,{}^{2}/_{3}$.

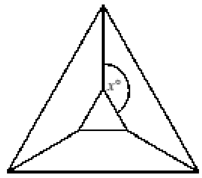
10. Punkt (6, 2) jest ukryty za (3, 1), (6, 3) jest ukryty za (2, 1), a (6, 4) za (3, 2). Widoczne są tylko te punkty, których współrzędne są względnie pierwsze. Jeśli mają wspólny dzielnik różny od 1, np. równy d, to punkt (md, nd) jest ukryty za punktem (m, n), bo leżą na linii prostej przechodzącej przez (0, 0). Zatem punkt (6, 5) jest widoczny, a (84, 45) nie, bo 3=WD(84, 45).

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ III

1) Przy każdym wierzchołku trzynastokąta mamy napisać dowolną liczbę całkowitą, tak żeby sumy liczb napisanych przy końcach każdego boku były nieparzyste. Czy to możliwe?

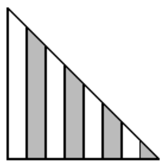
2) Na pytanie: Która jest godzina? zagadnięty przechodzień odpowiedział: Pozostało jeszcze z doby ćwierć tego, co już upłynęło. Która to była godzina?

3) Trójkąt równoboczny umieszczono wewnątrz większego trójkąta równobocznego tak, że powstała figura ma trzy osie symetrii. Ile wynosi *x*?



4) Zegar babci Józi bije co pół godziny. Bije raz o godz. 0:30, dwa razy o 1:00, trzy razy o 1:30 itd. aż zakończy cykl ośmioma uderzeniami. Potem cykl uderzeń zaczyna się od nowa. Ile razy bije zegar w ciągu doby?

5) W serialu „K jak kłamstwo" nie wszystkie postacie są prawdomówne. Kiedy w odcinku 36528. inspektor Gadżet zapytała, z ilu osób składa się rodzina Poszepszyńskich, cztery bohaterki odpowiedziały następująco:
Melancholia: Z liczby parzystej.
Nasturcja: Z liczby nieparzystej.
Ortodoncja: Z liczby pierwszej.
Petronela: Z liczby złożonej.
Ile z nich powiedziało prawdę?



6) Prostokątny trójkąt równoramienny pokolorowano w 8 pasów o jednakowej szerokości równolegle do jednej z przyprostokątnych, jak na rysunku. Jaka część pola trójkątna jest zacieniowana?

7) Symbol $n!$ (czytaj: *en silnia*) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Ile tygodni jest w 8! minutach?

8) Wiadomo, że liczba m jest parzysta, a n – nieparzysta. Jaka jest parzystość liczby $(m+3n)^2$?

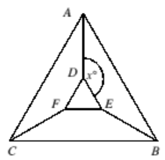
9) Podstawę trójkąta wydłużono o ¼ jej długości i jednocześnie skrócono opuszczoną na tę podstawę wysokość, tak że pole trójkąta się nie zmieniło. O jaką część jej długości skrócono wysokość?

10) Alicja sumuje liczby nieparzyste do 199 i zapisuje sumy częściowe, tzn. wyniki działań 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, …, 1+3+5+…+197+199. Ile liczb na liście Alicji kończy się czwórką?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Przy kolejnych wierzchołkach muszą stać na zmianę liczby parzyste i nieparzyste (bo tylko suma liczb o różnej parzystości daje wynik nieparzysty). Zatem boki o numerach nieparzystych zaczynają się liczbą tej samej parzystości (np. parzystą, a kończą liczbą nieparzystą). Ale początek boku pierwszego jest jednocześnie końcem boku trzynastego, co oznacza, że powinna tam stać jednocześnie liczba parzysta i nieparzysta, a taka liczba nie istnieje. Za pokazanie niemożliwości na przykładach przyznajemy 3 pkt.

2. Według przechodnia aktualna godzina dzieliła dobę w stosunku 4:1. To znaczy, że upłynęło do tej pory ${}^{4}/_{5}$ doby, co daje ${}^{4}/_{5}\cdot 24 = {}^{96}/_{5} = 19{}^{1}/_{5} = 19{}^{12}/_{60}$. To znaczy, że była 19:12.



3. Z symetrii kąt pełny wokół wierzchołka *D* składa się z dwóch kątów po $x°$ i kąta 60 °, zatem $2x=300$, więc $x=150$.

4. Osiem razy bije zegar o 4:00. W ciągu każdego 4-godzinnego cyklu zegar bije 1+2+3+4+5+6+7+8=36 razy. W ciągu doby jest 6 takich cykli, więc zegar bije w sumie 6·36=216 razy.

5. Prawdę mówi dokładnie jedna z pań z pary M-N oraz jedna z pary O-P (te możliwości się dopełniają i wykluczają). Pozostałe układy par są niezależne. Zatem dokładnie dwie panie mówią prawdę, choć nie wiemy, które.

6. Niech każdy pasek ma szerokość 1. Wtedy ramię trójkąta ma długość 8, a pole trójkąta wynosi 32. Zauważmy, że pierwszy zacieniowany pasek z prawej ma pole o 1 mniejsze niż następny niezacieniowany pasek. Podobnie drugi zacieniowany ma pole o 1 mniejsze niż następny niezacieniowany itd. Takich par z różnicą pól 1 jest 4. Oznacza to, że pole zacieniowane jest o 4 mniejsze niż pole niezacieniowane, czyli wynosi (32-4):2=14. Zacieniowane jest zatem 14/32=7/16 pola trójkąta.

7. Liczba minut w tygodniu to 7·24·60 = 7·(6·4)·(5·3·2·2) = 1·2·3·4·5·6·7·2 = 7!·2. Natomiast 8! = 7!·8, a więc 4 razy więcej. Zatem w 8! minutach są 4 tygodnie. Za prowadzenie obliczeń na dużych liczbach odejmujemy 2 pkt.

8. Liczba nieparzysta *n* nie ma dwójki w rozkładzie na czynniki. Zatem liczba 3n tez jej nie ma, więc także jest nieparzysta. Suma liczby parzystej *m* i nieparzystej 3*n* jest nieparzysta. Kwadrat liczby nieparzystej *q* to iloczyn $q\cdot q$. Jego rozkład na czynniki to dwukrotnie powtórzony rozkład liczby *q*. Jeśli w rozkładzie *q* nie ma dwójki, to nie będzie jej w powtórzonym rozkładzie, a że 2 jest liczbą pierwsza, nie pojawi się także z iloczynu jakich innych czynników. Za brak uzasadnienia nieparzystości liczb w kolejnych etapach rozumowania odejmujemy po 2 pkt.

9. Niech *p* i *h* to wyjściowe długości podstawy i wysokości trójkąta. Aby nie zmieniło się pole, niezmieniony musi pozostać iloczyn *ph*. Po wydłużeniu podstawy o ¼*p* ma ona długość ${}^{5}/_{4}p$, zatem nowa wysokość powinna mieć długość ${}^{4}/_{5}h$, a zatem musi zostać skrócona o ${}^{1}/_{5}$ swojej długości.

10. Wszystkich liczb Alicji jest tyle, co liczb nieparzystych od 1 do 199 czyli 100 (połowa liczb naturalnych od 1 do 200). Na ostatnią cyfrę sumy mają wpływ tylko ostatnie cyfry składników (wynika to z algorytmu dodawania pisemnego). Zatem zamiast dodawać kolejne liczby nieparzyste, możemy dodawać jako ostatni składnik do poprzedniej sumy liczby 1, 3, 5, 7, 9, 1 (zamiast 11), 3 (zamiast 13), 5, 7, 9 itd. (powtarza się to w cyklu co 5). Natomiast ostatnie cyfry otrzymywanych sum to 1, **4**, 9, 6, 5, 6, 9, **4**, 1, 0. To jest 10 kolejnych miejsc i dalej powtarza się w cyklu co 10. Zatem co 10 wyrazów dodajemy do tych samych ostatnich cyfr poprzedniej sumy te same ostatnie cyfry ostatnich składników. Wszystko powtarza się więc cyklicznie co 10 miejsc. Takich cykli w 100 wynikach jest 10, a w każdym cyklu cyfra 4 występuje na końcu 2 razy. Zatem łącznie wystąpi 10·2=20 razy.