



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XI – ROK SZKOLNY 2011/12
SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – RUNDA PÓLFINAŁOWA
MECZ I

1. Czy istnieją dwie liczby całkowite, których suma sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu daje 150?
2. Mając do dyspozycji tylko kartkę papieru i cyrkiel o rozwarości 1, ustawić jego rozwarość na $\sqrt{3}$.
3. Ile czasu upływa między kolejnymi spotkaniami wskazówek zegara?
4. Czy równanie kwadratowe $x^2+px+q=0$ o nieparzystych współczynnikach może mieć pierwiastek wymierny?
5. Pokaż, że funkcja spełniająca dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i ustalonego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ jest okresowa.
6. Która z liczb jest większa $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}$ czy $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{20} + 2\sqrt[3]{2}$?
7. Czy można znaleźć na płaszczyźnie 100 punktów o tej własności, że każde trzy z nich są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego?
8. Rozwiąż równanie funkcyjne, gdzie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych warunek $f(x)f(y)+1 = f(x)+f(y)+xy$.
9. Dwóch uczniów otrzymało na kartkach do wykonania identyczne mnożenie liczb naturalnych. Jeden z nich otrzymał wynik o 2277 większy niż drugi, chociaż obaj twierdzą, że nie popełnili błędu. Czy to możliwe?
10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie losowo wybrane przekątne ścian graniastosłupa prawidłowego stukątnego będą równoległe?



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XI – ROK SZKOLNY 2011/12
SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – PÓLFINAŁOWA
MECZ II

1. Czy liczba 5042176803021 jest sześcianem?
2. Mając do dyspozycji tylko kartkę papieru i cyrkiel o rozwarości 1, ustawić jego rozwarość na $\sqrt{2}$.
3. Ile czasu upływa między kolejnymi momentami, gdy wskazówki zegara są prostopadłe?
4. Czy równanie $ax^2+bx+c=0$ o całkowitych współczynnikach, które dla argumentów całkowitych przyjmuje wartości będące wielokrotnościami 5, musi mieć współczynniki podzielne przez 5?
5. Czy funkcja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{W} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{W} \end{cases}$ jest okresowa, a jeśli tak, to jaki ma okres?
6. Jeśli dzisiaj jest poniedziałek, to jaki dzień tygodnia wypadnie za 8^{101} dni?
7. Rozwiąż równanie funkcyjne, gdzie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych warunek $f(x)f(y)+x+y = f(x)+f(y)+xy$.
8. Czy istnieje naturalna potęga dwójki, która (w zapisie dziesiętnym) ma dokładnie 100 cyfr i jej pierwszą (od lewej) cyfrą jest jedynka?
9. Uzasadnij, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$.
10. Ile przekątnych ma dwunastościan foremny?



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XI – ROK SZKOLNY 2011/12
SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ III

1. Czy iloczyn pewnej liczby kolejnych liczb pierwszych może być kwadratem?
2. Doprowadź wyrażenie $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$ do postaci sumy algebraicznej.
3. Czy każdy trójkąt można podzielić na trójkąty równoramienne?
4. Wyznacz liczby x i y aby trzy pierwsze wyrazy ciągu $27, x, y, -3$ tworzyły ciąg geometryczny a trzy ostatnie – ciąg arytmetyczny.
5. Funkcja $ax^2+bx+c=0$ przyjmuje w liczbach całkowitych wartości całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $2a, a+b$ i c są liczbami całkowitymi.
6. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i ustalonego $a \in \mathbb{R}$ warunek $f(x-a)+f(x)+f(x+a)=0$ musi być okresowa?
7. Czy istnieje funkcja różnowartościowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która nie jest rosnąca ani malejąca na żadnym przedziale?
8. Pokaż, że suma kolejnych naturalnych potęg 3 o wykładnikach od 1 do 999 jest podzielna przez 13.
9. W ćwiartkę okręgu wpisano prostokąt (jak na rysunku), przy czym $|OB|=|BC|=5$. Oblicz pole zacieniowanej części.
10. Strzelając do tarczy, Robin Chód uzyskuje co najmniej 9 pkt. z prawdopodobieństwem 50%, a najwyżej 9 pkt. z prawdopodobieństwem 60%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzy razy pod rząd trafi dziewiątkę?

