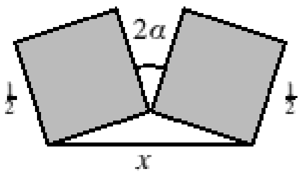
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XII – ROK SZKOLNY 2012/13

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1. Adam powiedział: *Tylko jeden z nas mówi prawdę*. Bartek powiedział: *Adam nie mówi prawdy*. Czesław powiedział: *Bartek nie mówi prawdy*. Damian powiedział: *Czesław nie mówi prawdy*. Euzebiusz powiedział: *Damian nie mówi prawdy*. Ilu chłopców powiedziało prawdę?



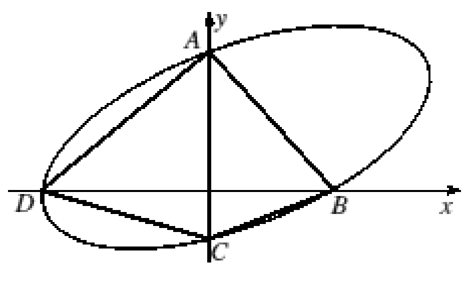
2. Jaka jest ostatnia niezerowa cyfra liczby $2^{2013}\cdot 3^{56}\cdot 5^{1957}$ i ile jest po niej zer?

3. Kwadraty z rysunku mają boki o długości ½ i są nachylone pod kątem 2α. Ile wynosi x?

4. Czy liczbę 1111 można zapisać jako sumę dwóch liczb pierwszych?

5. Spośród sześciorga studentów z programu Erasmus, którzy wspólnie wynajmują mieszkanie, każdy mówi dokładnie w dwóch językach. Ana mówi po angielsku i niemiecku, Bill po niemiecku i hiszpańsku, Cornelis po francusku i hiszpańsku, Drake po niemiecku i francusku, Eduard mówi po francusku i angielsku, a Francois po hiszpańsku i angielsku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana dwójka z nich będzie się mogła swobodnie porozumieć?

6. Profesor Sędziwy codziennie chodzi do pracy na piechotę. Wychodzi zawsze o 8:00. W czwartek szedł 10% szybciej niż wynosi jego codzienna średnia prędkość. W efekcie był w pracy x minut wcześniej niż zwykle. Ile czasu zajęło mu dojście do pracy w środę?



7. Rysunek przedstawia elipsę o równaniu $x^2+y^2-xy+x-4y = 12$. Jakie pole ma czworokąt $ABCD$ wpisany w tę elipsę, którego wierzchołki znajdują się w miejscach przecięcia krzywej z osiami układu współrzędnych?

8. Baśka wypisała wszystkie liczby trzycyfrowe, a następnie dla każdej z nich wyliczyła iloczyn cyfr. Na koniec dodała wszystkie otrzymane iloczyny. Jaki wynik uzyskała?

9. Ile różnych par liczb rzeczywistych spełnia równanie $(x+y)^2 = (x+4)(y-4)$?

10. Cyfry x i y są niezerowe. Liczba pięciocyfrowa $xyxyx$ dzieli się przez 3, a siedmiocyfrowa $yxyxyxy$ przez 18. Jakimi cyframi są x i y?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XII – ROK SZKOLNY 2012/13

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

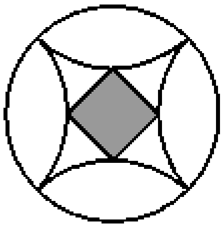
1. W każdą pustą kratkę diagramu Baśka chce wpisać liczbę w taki sposób, aby suma pierwszych trzech liczb wyniosła 100, środkowych trzech 200, a ostatnich trzech 300. Jaką liczbę powinna wpisać w środkową kratkę?

10				130

2. Zosia pocięła kostkę żółtego sera na drobne kawałeczki i zostawiła na stole. W ciągu dnia do kuchni zakradły się myszy i ukradły kawałki sera. Obserwował je leniwy Garfield. Zauważył, że każda z myszy ukradła inną liczbę kawałków sera nie większą od 10 i że żadna mysz nie ukradła dwukrotnie więcej kawałków niż któraś inna. Jaką największą liczbę myszy mógł widzieć Garfield?

3. Ile wynosi najmniejsza liczba naturalna, której suma cyfr jest równa 2013?

4. Wzór przedstawiony na rysunku można znaleźć na posadzce włoskiej katedry w Spoleto. Zewnętrzny okrąg ma promień 1, podobnie jak wewnętrzne ćwiartki okręgów otaczające kwadrat. Ornament ma cztery osie symetrii. Jaką długość ma bok kwadratu?



5. Tom i Jerry rozgrywają zawody w rzutach myszką do celu. Na początku każde z nich ma jedną próbę. Jeśli jedno z nich trafi, a drugie nie, ten, kto odniósł sukces, zwycięża. Jeśli oboje trafią lub oboje chybią, mają kolejną próbę. Tom trafia do celu z prawdopodobieństwem $^4/_5$,
a Jerry z prawdopodobieństwem $^2/_3$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Tom wygra zawody?

6. W trapezie *PQRS* zachodzi: *SP* || *RQ* oraz *PQ* = *SR* = 25 cm. Pole tego trapezu wynosi 600 cm^2.
W trapez wpisano okrąg o środku *C*. Jaki jest jego promień?

7. Na pastwisku Mc Donalda trawa przyrasta codziennie w tej samej ilości. Sześć krów potrzebuje trzech dni, żeby zjeść trawę do końca, a trzy krowy potrzebują na to siedmiu dni. Każda krowa zjada dziennie tyle samo trawy. Przez ile dni może paść się pojedyncza krowa zanim zje całą trawę z pastwiska?

8. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie $(1+x)^4-2(1-x)^4 = (1-x^2)^2$.

9. Dany jest 25-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Ile ma przekątnych krótszych od 1?

10. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > 1$, zachodzi poniższa nierówność. Potęgowanie wykonujemy „od góry", tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

$$\left(x^{x^x}\right)^{x^{x^x}} < \left(x^x\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}$$

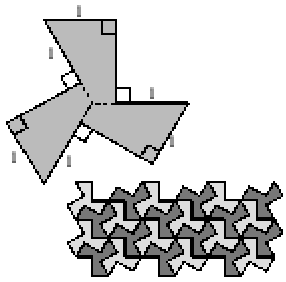
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XII – ROK SZKOLNY 2012/13

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

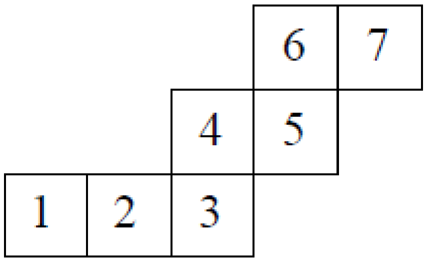
MECZ III

1. Palindrom czytamy jednakowo w przód i wstecz. Jaka jest suma cyfr największego czterocyfrowego palindromu podzielnego przez 15?

2. O liczbach x, y i z wiadomo, że $x+y+z = 1$, $x+y-z = 2$ oraz $x-y-z = 3$. Ile wynosi iloczyn liczb x, y i z?



3. Baśka zaprojektowała kafelki do wyłożenia podłogi w łazience. Każdy składa się z trzech przystających czworokątów, jak na rysunku. Każdy ma 9 boków, po 3 parami prostopadłe, a 6 z nich ma długość 1. Jakie jest pole kafelka?



4. Suma cyfr liczby siedmiocyfrowej wynosi sześć. Ile wynosi iloczyn cyfr tej liczby?

5. Toczymy kostkę do gry w taki sposób, że jej dolna ścianka zajmuje kolejno pozycje od 1 do 7 jak na diagramie. W których pozycjach na spodzie znajduje się ta sama ścianka kostki?

6. Punkty T i U leżą na zewnątrz równoległoboku $PQRS$ w taki sposób, że trójkąty RQT i SRU są równoboczne i nie mają punktów wspólnych z wnętrzem równoległoboku. Pokaż, że trójkąt PTU również jest równoboczny.

7. Liczbę 3 można zapisać jako sumę liczb naturalnych na 4 różne sposoby: 3, 1+2, 2+1, 1+1+1. Na ile sposobów jako sumę liczb naturalnych można zapisać 7?

8. Łączymy losowo wybrane trzy spośród wierzchołków ośmiokąta foremnego, tworząc trójkąt. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on prostokątny?

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $1^3+3^3+5^3+7^3+...+(2n-1)^3 = \binom{2n^2}{2}$.

10. Liczby pierwsze p, q, r spełniają układ nierówności $p^7 < q^3$, $pq^2 < r^9$. Dowieść, że $p^5 < r^8$.