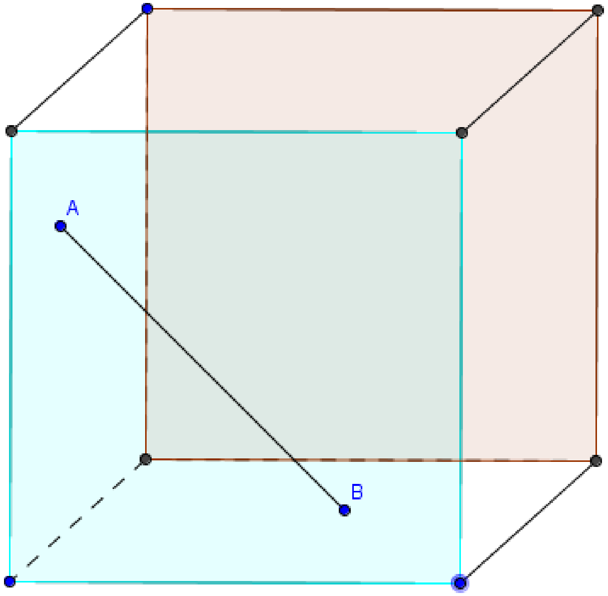
PROSTE NA SZEŚCIANIE

Odległość na sześcianie

Odległość między dwoma punktami to długość najkrótszej linii łączącej te punkty.



Odległość na sześcianie

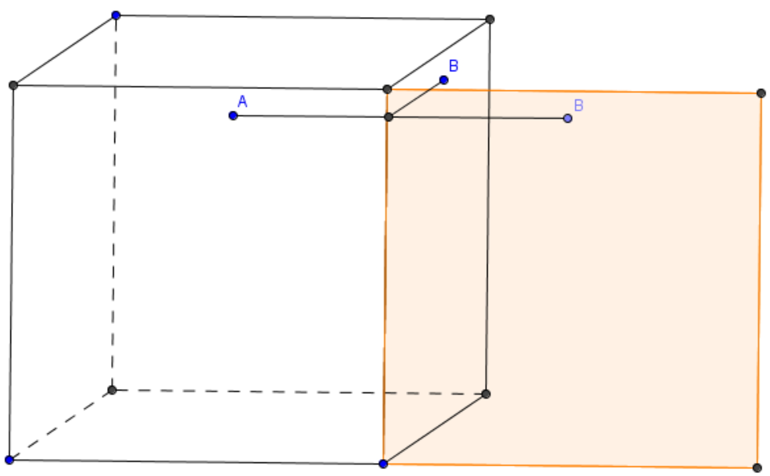
Uwagi.

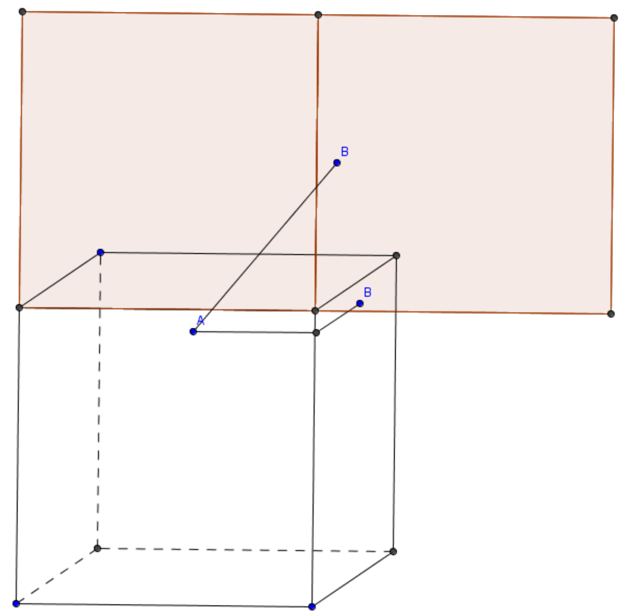
(1) Jeżeli punkty *A* i *B* leżą na jednej ścianie sześcianu (również na brzegu ściany), to odległość między nimi to długość euklidesowego odcinka *AB*.

(2) Jeżeli punkty *A i B* nie leżą na tej samej ścianie, to odległość między nimi to długość najkrótszego euklidesowego odcinka *AB* spośród utworzonych na wszystkich siatkach (również innych płaskich rozwinięciach) sześcianu.

Odległość na sześcianie

Gdy punkty *A* i *B* leżą na sąsiednich ścianach wybór najkrótszej linii nie zawsze jest oczywisty:





Pierwszy czy drugi odcinek realizuje odległość na sześcianie?

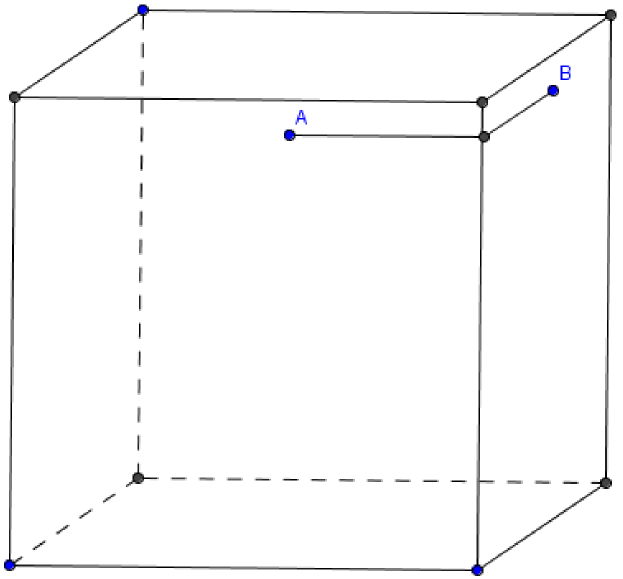
Odległość na sześcianie - przykład

Rozważmy sześcian o krawędzi 10. Niech punkty *A* i *B* leżą na sąsiednich ścianach w odległości 1 od krawędzi w połowie szerokości ściany.

Oznaczenie:

$|AB|_e$ - odległość euklidesowa

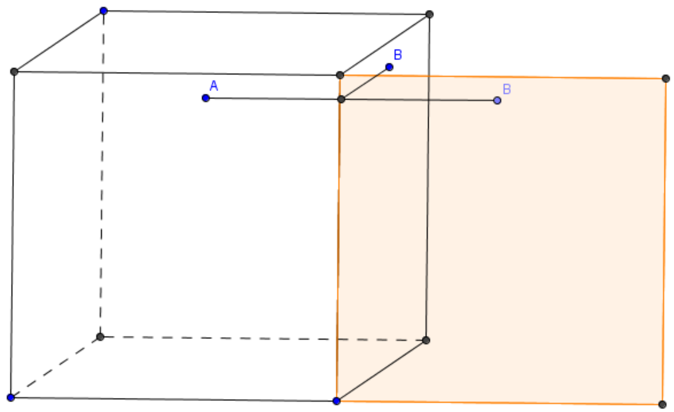
$|AB|$ - odległość na sześcianie

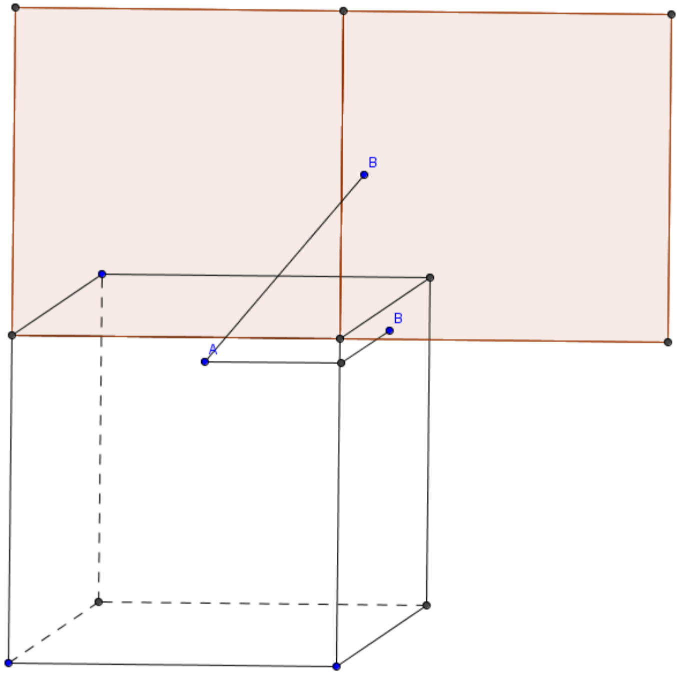


Odległość na sześcianie - przykład

$|AB|_e = 10$

$|AB|_e = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

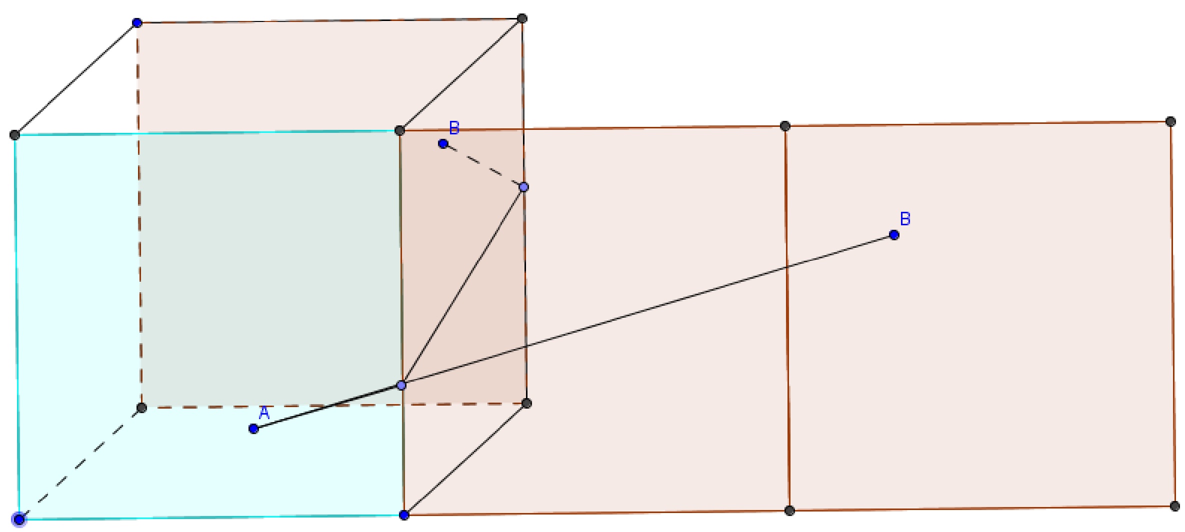




Zatem $|AB| = 6\sqrt{2}$

Odległość na sześcianie

Gdy punkty *A* i *B* leżą na przeciwległych ścianach, ich odległość można zmierzyć następująco:



Uwaga

Chcąc znaleźć odległość między dwoma punktami, wyznaczamy euklidesowo najkrótszą linię łączącą te punkty. Jednocześnie wyznaczamy pewien kierunek.

Kierunek na sześcianie

Przedłużyć „odcinek" w danym kierunku, to przedłużyć tak, aby lokalnie odległości między punktami przedłużenia były najmniejsze.

Poruszając się po jednej ścianie, przedłużamy odcinek euklidesowo. Przechodząc przez krawędź kładziemy sąsiadujące ściany w jednej płaszczyźnie i przedłużamy euklidesowo.

Przedłużanie w danym kierunku nie ma sensu, gdy dotrzemy do wierzchołka sześcianu.

Prosta

W klasycznej geometrii euklidesowej *prosta* jest pojęciem pierwotnym, tzn. niedefiniowalnym w języku danej teorii (w tym przypadku nie podajemy definicji prostej, używając terminów geometrii).

Linia geodezyjna

Odpowiednikiem euklidesowej *prostej* na powierzchniach innych niż płaszczyzna jest *geodezyjna*.

Intuicyjne rozumienie definicji geodezyjnej

Geodezyjna to krzywa w przestrzeni metrycznej (czyli takiej, w której można mierzyć odległości między punktami) zawierająca najkrótszą drogę pomiędzy dowolnymi dostatecznie bliskimi swoimi punktami, niedająca się już wydłużyć w żadną stronę.

Lokalnie najkrótsza linia.

Geodezyjna na sześcianie

1) Wybieramy dwa różne punkty *A*, *B*.
2) Łączymy je linią o możliwie najmniejszej długości.
3) Przedłużamy powstałą w punkcie 2) linię w wyznaczonym kierunku w obie strony (o ile to możliwe).

Tak powstała krzywa to geodezyjna.

Zbadajmy!

Zbadamy własności geodezyjnych na sześcianie. Sprawdzimy, które własności euklidesowych prostych przenoszą się na „proste” na sześcianie, a które nie.

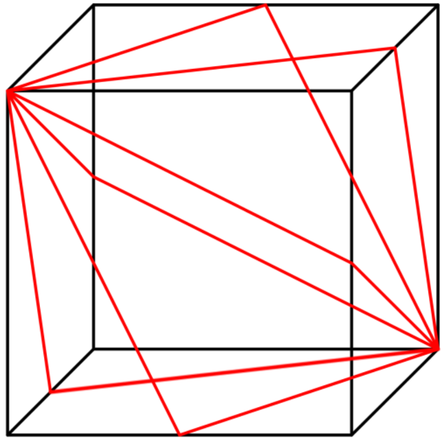
„Przez każde dwa punkty przechodzi prosta”

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnie wybranych dwóch punktów na sześcianie istnieje geodezyjna, która je łączy.

Własność prawdziwa!

„Dwa różne punkty wyznaczają dokładnie jedną prostą”

Rozważmy dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu. Łatwo zauważyć aż 6 nieskracalnych linii tej samej długości łączących te punkty.



Własność fałszywa!

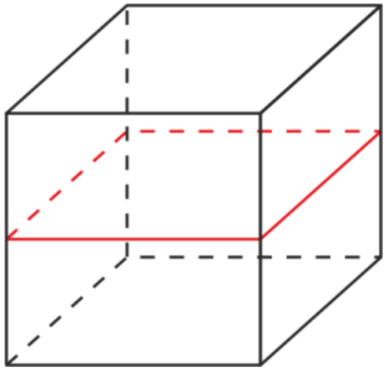
„Prosta jest linią nieograniczoną”

Geodezyjne rozważane przy okazji poprzedniej własności są liniami ograniczonymi.

Własność fałszywa!

„Długość prostej jest nieskończona”

Rozważmy dwa punkty leżące na jednej ścianie na odcinku równoległym do jednej z krawędzi. Wówczas geodezyjna wyznaczone przez te punkty ma skończoną długość.



Własność fałszywa!

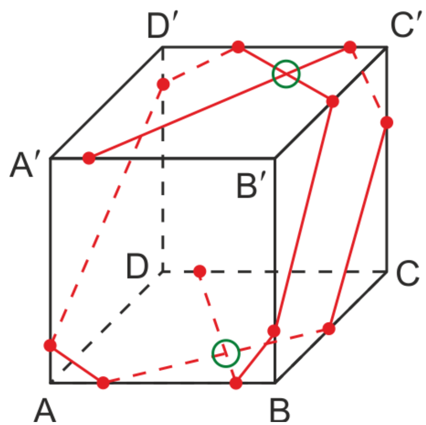
„Prosta jest linią otwartą”

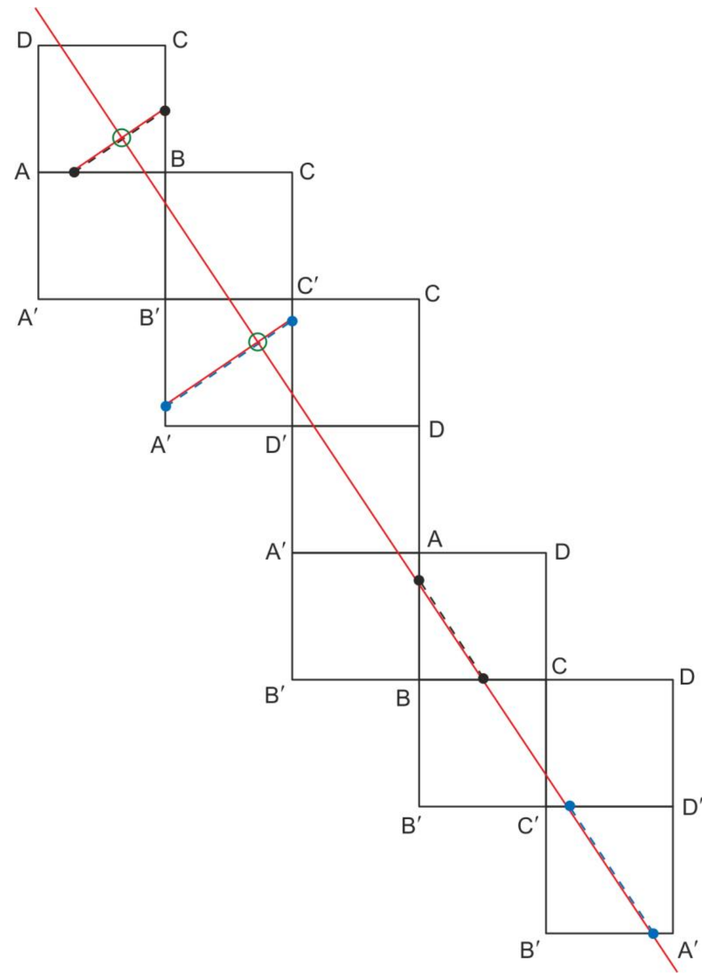
Poprzedni przykład pokazuje, że geodezyjna nie musi być linią otwartą.

Własność fałszywa!

„Linia geodezyjna nie ma samoprzecięć”

Geodezyjna może mieć samoprzecięcia.



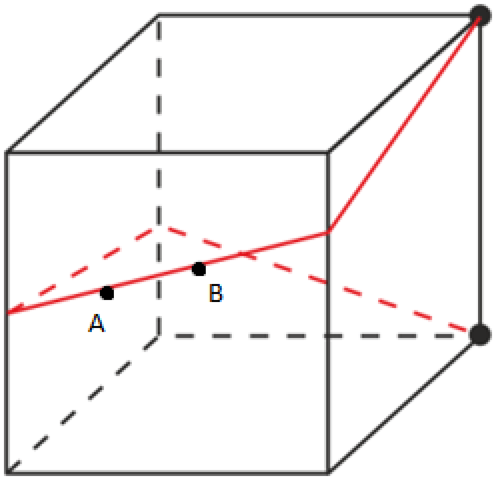


Własność fałszywa!

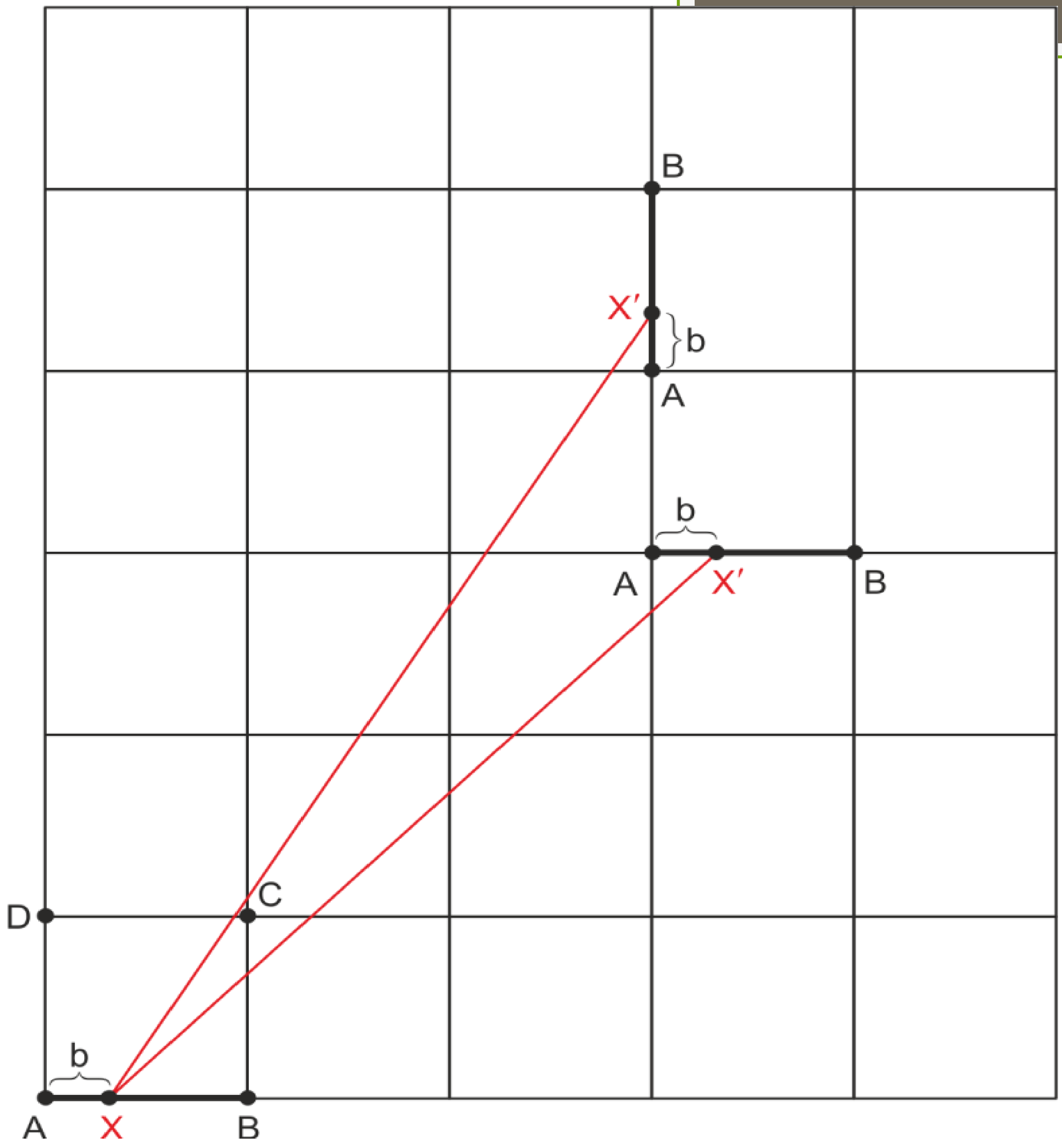
„Idąc po prostej idziemy po najkrótszej z dróg między każdymi dwoma jej punktami.”

Łatwo narysować geodezyjną wyznaczoną przez punkty *A* i *B* (współczynnik nachylenia kolejnych odcinków do poziomu to $\frac{1}{4}$).

Wyznaczona geodezyjna łączy dwa wierzchołki sześcianu, ale nie jest najkrótszą linią je łączącą (najkrótsza jest krawędź).



Własność fałszywa!


B
X′
b
A
b
A
X′
B
D
C
b
A
X
B

Czy geodezyjna może mieć nieskończoną długość?

W każdym parkietażu (powstałym z rozpłaszczenia sześcianu) wyjściowa krawędź *AB* pojawi się w pozycji równoległej lub prostopadłej powiedzmy *n* kroków w prawo i *k* w górę. Jeśli punkty *X* i *X'* leżą na *AB* w jednakowych odległościach od *A* (równych *b*), otrzymamy geodezyjną zamkniętą. Tangens kąta jej nachylenia do *AB* wynosi wtedy $\frac{k}{n}$ (w przypadku równoległym) lub $\frac{ka+b}{na-b}$ (w przypadku prostopadłym). Takich kątów jest przeliczalnie wiele. Także w przeliczalnie wielu przypadkach geodezyjna z punktu *X* trafi w wierzchołek i tam się skończy. W pozostałych przypadkach otrzymamy geodezyjne o nieskończonej długości.