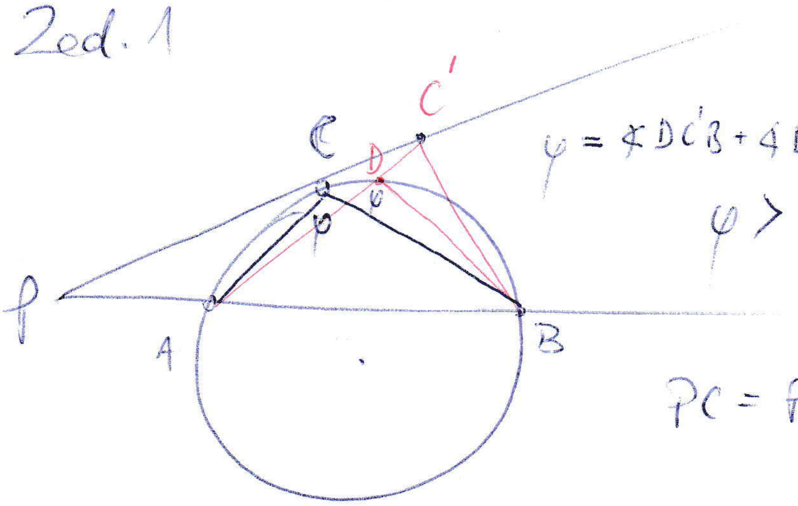
Zad. 1

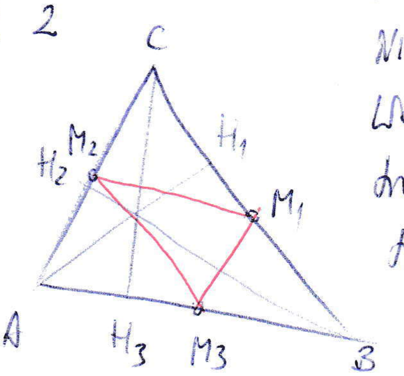


$\varphi = \sphericalangle DC'B + \sphericalangle DBC' = \sphericalangle AC'B + \sphericalangle DBC' \Rightarrow$

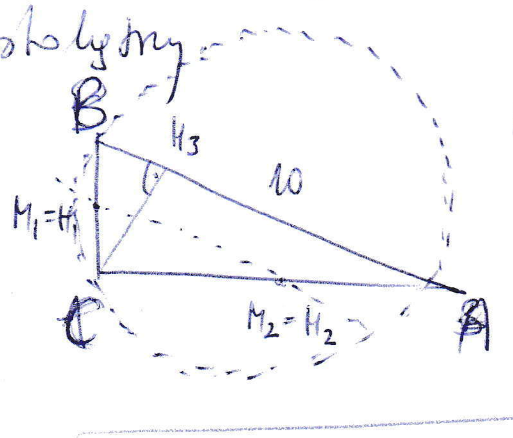
$\varphi > \sphericalangle AC'B$

$PC = PA \cdot PB$

Zad 2

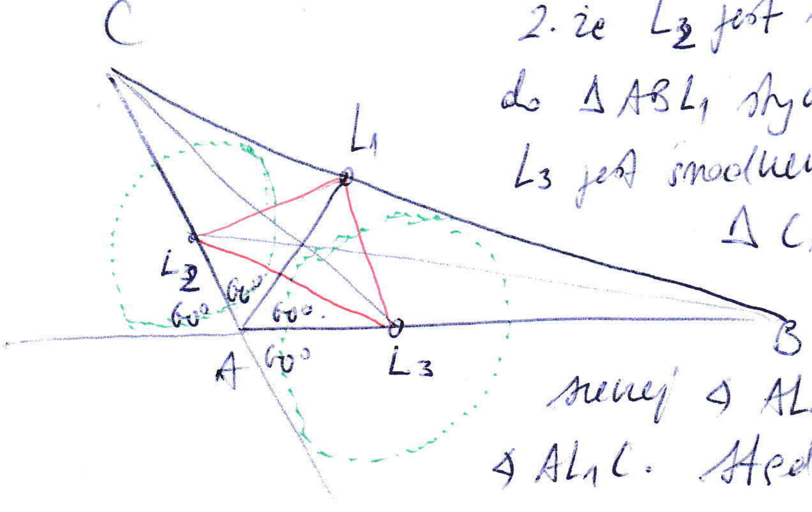


Niech $\triangle ABC$ jest ostrokątny.
Niech M_1, M_2 i M_3 są środkami boków trójkąta ABC. Wówczas środki wysokości leżą na bokach trójkąta $M_1M_2M_3$. Żadna prosta nie przecina trzech boków $\triangle$ stąd ten przypadek nie jest możliwy. Podobnie wykazujemy że nie może to być trójkąt rozwartokątny. Zostaje zatem trójkąt prostokątny.



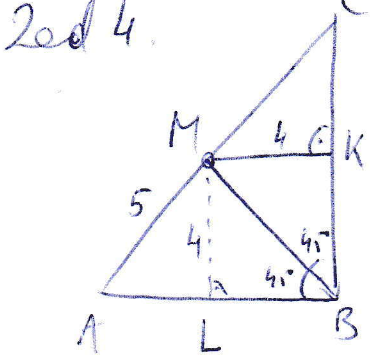
Największe pole ma trójkąt równoramienny i wówczas $h = 5 = R$ stąd $P_{max} = 25$.

Zad 3



Niech $\sphericalangle A = 120°$
Z. że L_2 jest środkiem okręgu dopisanego do $\triangle ABL_1$ stycznego do boku AL_1 oraz że L_3 jest środkiem okręgu dopisanego do $\triangle CAL_1$ stycznego do AL_1. Stąd L_3 leży na dwusiecznej $\sphericalangle AL_1B$ a L_2 na dwusiecznej $\sphericalangle AL_1C$. Stąd $\sphericalangle L_2L_1L_3 = 90°$.

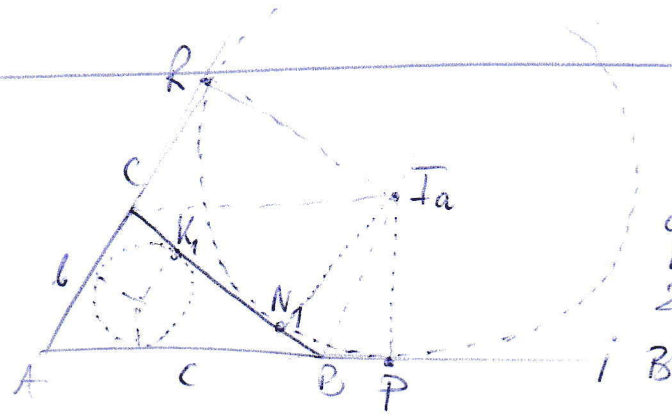
Zad 4.



Z. że MK = ML (bo MB jest dwusieczną) stąd AL = 3 i AB = 7. Z podobieństwa △MCK i △ABC mamy

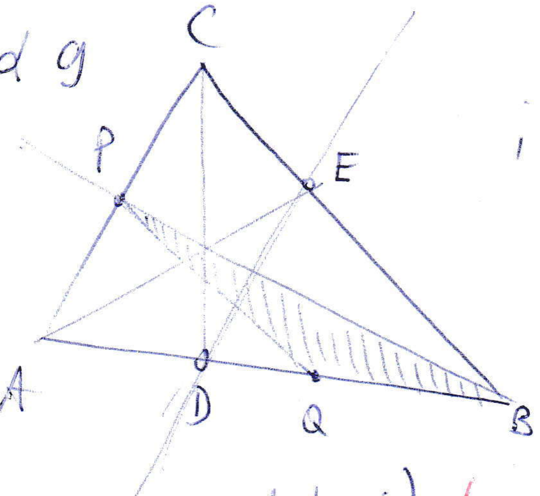
$\frac{a}{7} = \frac{a-4}{4}$ stąd $a = \frac{28}{3}$. Ostatecznie $P_{ABC} = \frac{98}{3}$

Zad 8



Z. że $CK_1 = p - c$ (należy wykazać) gdzie p = połowa obwodu △ABC. Z drugiej strony AP = AR = p i $BN_1 = BP = p - c$. Stąd teza.

Zad 9



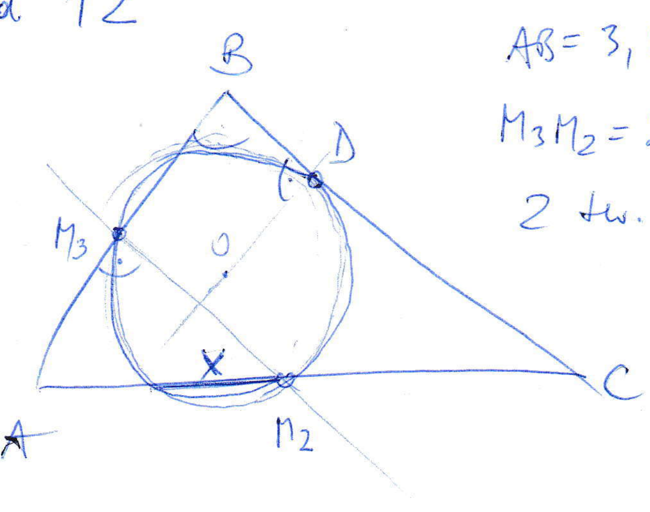
niech QB = a wówczas AQ = 7a oraz DE = b i wówczas AC = 7b.

$P_{DEB} = 8 \Rightarrow P_{ABC} = 49 \cdot 8 = 392$ (△DEB i △ABC podobne w skali $\frac{1}{7}$)

Zauważmy że P jest środkiem AC (bo ADEC jest trapezem a AE i CD jego przekątnymi) (maturzyści to udowodnią?) stąd $P_{ABP} = 196$

stąd $P_{QBP} = \frac{1}{8} P_{ABP} = 24,5$.

Zad 12



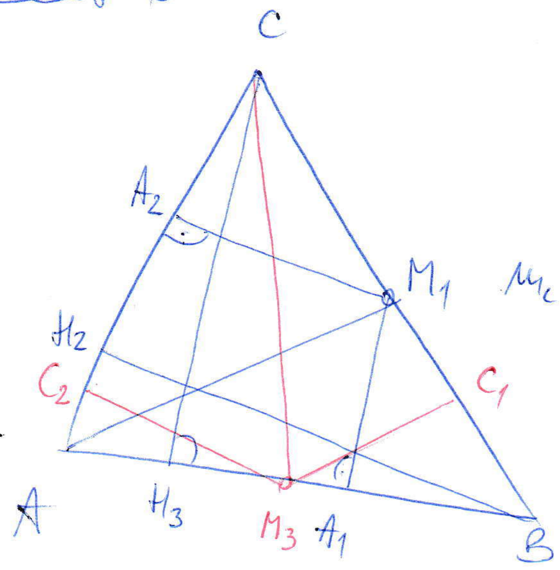
AB = 3, BC = 4 ⇒ AC = 5. Z. że DO jest symetralną M_2M_3

$M_3M_2 = 2 \Rightarrow BD = 1$ i DC = 3.

Z tw. o potędze punktu mamy $CD^2 = CM_2 \cdot AC$

$9 = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} + x\right)$ stąd $x = 1,1$.

Zad. 6



z tw. Talesa $M_1A_1 = \frac{1}{2} CH_3$, $M_1A_2 = \frac{1}{2} BH_2$ $\Rightarrow AM_1 = \frac{1}{2}(CH_3 + BH_2) = m_a$

analogicznie $C_2M_3 = \frac{1}{2} BH_2$, $M_3C_1 = \frac{1}{2} AH_1 \Rightarrow$

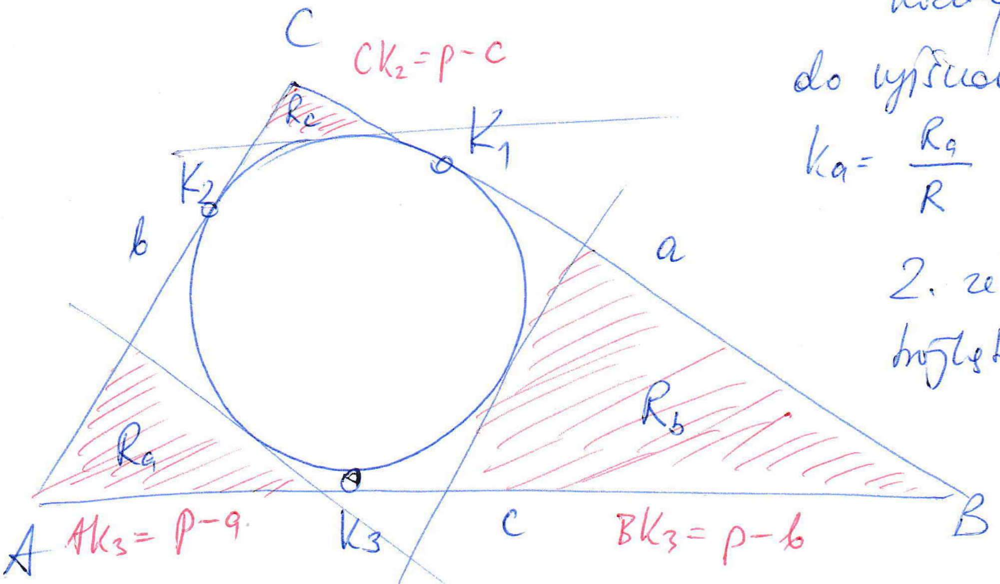
$m_c = CM_3 = \frac{1}{2}(BH_2 + AH_1)$ oraz

$BM_2 = \frac{1}{2}(CH_3 + AH_1) = m_b$.

dodając stronami otrzymujemy

$m_a + m_b + m_c = h_a + h_b + h_c$. Zauważmy że $m_a \geq h_a$, $m_b \geq h_b$ i $m_c \geq h_c$. Powyższe równości zachodzi tylko gdy $M_i = H_i$ $i = 1, 2, 3$. Gdyby choć jedna nierówność była ostra mielibyśmy sprzeczność. Cbdo.

Zad 11.



każdy z trójkątów jest podobny do wpisanego ABC i stąd $k_a = \frac{R_a}{R}$, $k_b = \frac{R_b}{R}$ i $k_c = \frac{R_c}{R}$

2. ze obwody poszczególnych trójkątów wynoszą

$l_a = 2(p-a)$ $l_c = 2(p-c)$

$l_b = 2(p-b)$

stąd $k_a = \frac{R_a}{R} = \frac{2(p-a)}{2p}$, $k_b = \frac{R_b}{R} = \frac{2(p-b)}{2p}$, $k_c = \frac{R_c}{R} = \frac{2(p-c)}{2p}$

dodając stronami otrzymujemy $\frac{R_a + R_b + R_c}{R} = \frac{2(p-a) + 2(p-b) + 2(p-c)}{2p} = 1$

stąd $R = R_a + R_b + R_c$