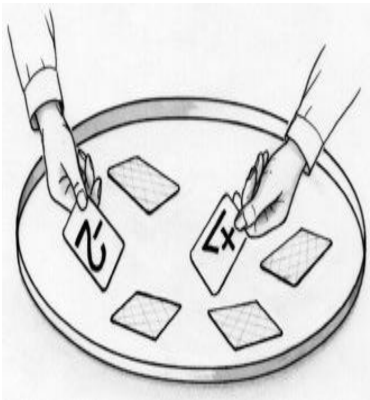
Matematyka bez Granic

Etap wstępny – edycja 2017

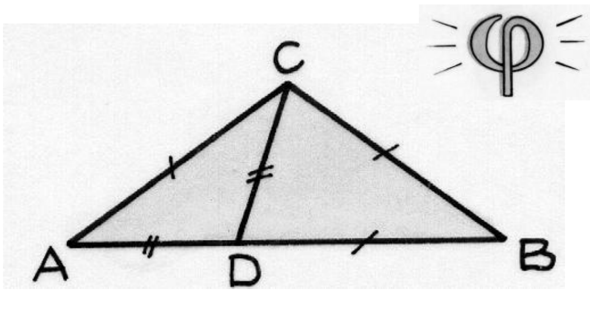
* Rozwiązanie każdego zadania należy przedstawić na osobnym arkuszu formatu A4.
* Sprawdzający biorą pod uwagę także częściowe rozwiązania oraz staranność pracy.

Zadanie 1. (7 pkt.) Mniej czy więcej?

Zredaguj odpowiedź w języku francuskim, niemieckim, angielskim, hiszpańskim lub włoskim, używając co najmniej 30 słów.

Peter hat auf den Tisch sechs Karten gelegt, die vo llig gleich aussehen. Auf der anderen Seite tra gt jede von ihnen jeweils eine der Zahlen +1, +2, +3, -1, -2, -3. Peter schla gt seinem Freund Paul das folgende Spiel vor: beide drehen gleichzeitig eine Karte um. Ist das Produkt der beiden Zahlen positiv, so ist Paul der Gewinner. Wenn das Produkt negativ ist, gewinnt Peter. Nach einigen Runden stellt Paul fest, dass Peter o fter gewinnt. Um seine Chancen zu erhöhen, schla gt er vor, eine der Karten mit einer negativen Zahl aus dem Spiel zu entfernen und mit fu nf Karten weiterzuspielen. **Hat Paul recht? Begründe die Antwort.**	Pedro ha colocado sobre la mesa seis cartas que presentan un verso idéntico. En el anverso de cada una de ellas figuran respectivamente los números +1, +2, +3, -1, -2, -3. Pedro propone entonces a su amigo Pablo el siguiente juego : cada uno levante simultáneamente una carta ; si el producto de los dos números que aparecen es positivo, Pablo gana; si el producto es negativo, Pedro es el ganador.Tras algunas partidas, Pablo se da cuenta de que Pedro gana más a menudo que él. Así, para aumentar sus posibilidades, propone a Pedro que quite una carta que tenga un número negativo y que retome el juego con las cinco cartas restantes. **¿Tiene Pablo razón? Justifique su respuesta.**	Peter put six cards down on the table. All of them have an identical back. On the other side they show respectively: +1, +2, +3, -1, -2, -3. Peter suggests the following game to his friend Paul: they both simultaneously turn up one card. If the product of the two numbers is positive, Paul wins. If the product is negative, Peter is the winner. After a few games, Paul notices that Peter wins more often. So, in order to increase his own chances of success, he proposes that Peter should take away one card with a negative number and then start the game again with five cards. **Is Paul right? Justify your answer.**
Pierre a posé sur la table six cartes présentant un verso identique. respectivement les nombres +1,+2,+3,-1,-2,-3. Pierre propose alors à son ami Paul le jeu suivant : ils retournent simultanément chacun une carte. Si le produit des deux nombres qui apparaissent est négatif, alors Pierre gagne, s'il est positif, c'est Paul qui gagne. Après quelques parties, Paul observe que Pierre gagne plus souvent que lui. Aussi, pour augmenter ses chances de gagner, il propose à Pierre d'enlever une carte portant un nombre négatif et de reprendre le jeu avec les cinq cartes restantes. **Paul a-t-il raison? Justifier la réponse.**		Pietro ha posto sulla tavola sei carte da gioco con un retro identico. Sul davanti di ciascuna ci sono i seguenti numeri: +1, +2, +3, -1, -2, -3. Pietro propone al suo amico Paolo questo gioco: ciascuno deve girare contemporaneamente una carta. neg spesso di lui. A questo punto, per avere maggiore fortuna, propone a Pietro di togliere una carta che ha un numero negativo e di ricominciare il gioco con le cinque carte rimanenti. **Paolo aveva ragione? Giustificate la risposta.**

Zadanie 2. (5 pkt) Złoty i srebrny

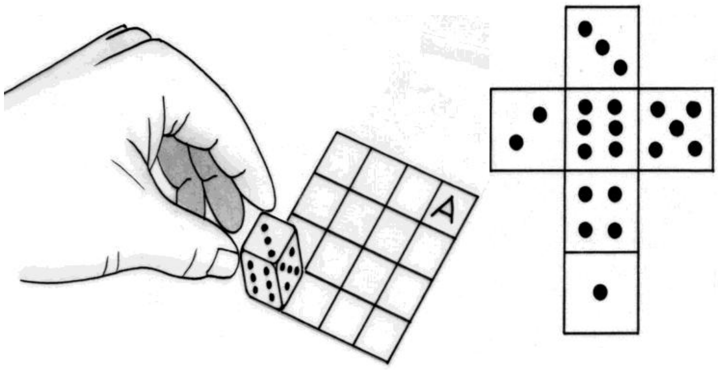


Trójkąty *ABC*, *BCD* i *ACD* są równoramienne.

Oblicz miary ich kątów.

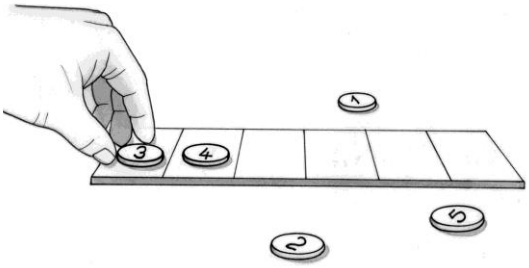
Zadanie 3. (7 pkt.) Rozłożona kostka

Sumy liczb zapisanych na przeciwległych ścianach kostki sześciennej są równe 7.
Kładziemy kostkę na siatce kwadratowej 4x4 (jak na rysunku obok). Pola siatki mają wymiary takie jak ściany kostki. Kostka dotyka siatki ścianą, na której są 4 oczka. Przemieszczamy kostkę z pola na pole, wykonując 6 obrótów wokół pewnej krawędzi przylegającej do planszy, aż kostka dotrze do pola oznaczonego A. Możemy uzyskać w ten sposób 20 różnych dróg. Każdej z nich odpowiada suma oczek ze ścian, które dotknęły siatki.



Znajdź drogi, na których uzyskamy najmniejszą oraz największą sumę.

Zadanie 4. (5 pkt.) Przywołanie do porządku

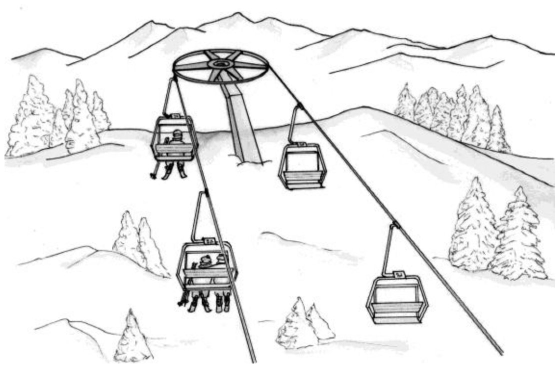


Na 6-polowej planszy umieszczamy pięć żetonów ponumerowanych od 1 do 5. Każdy z nich ma inny numer. Gra polega na przemieszczeniu żetonów tak, aby ułożyć je rosnąco od lewej do prawej według następujących zasad:
- na każdym polu może znajdować się tylko jeden żeton
- każdy żeton może być przemieszczony tylko raz
- żeton może przeskakiwać przez jeden lub więcej żetonów
- na końcu gry pole leżące najbardziej po prawej musi być puste.

Na początku gry żeton nr 3 znajduje się na pierwszym polu, licząc od lewej, a żeton nr 4 - na drugim. Podaj możliwe pozycje trzech pozostałych żetonów na początku gry.

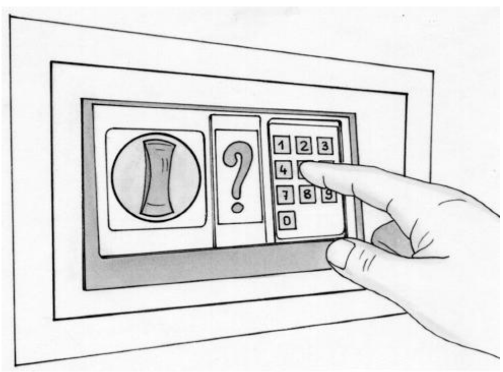
Zadanie 5. (7 pkt.) Wymijające krzesełka

Oskar spędza ferie zimowe w górach. Właśnie wjeżdża wyciągiem. Siedzi na krzesełku numer 110 i mija krzesełko numer 130. W tym samym czasie jego siostra Eliza, która siedzi na krzesełku nr 290, mija krzesełko nr 250. Krzesełka są rozmieszczone w jednakowych odległościach, w kolejności rosnących numerów, zaczynając od krzesełka z numerem 1.



Ile jest krzesełek na tym wyciągu? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 6. (5 pkt) Cyfry i litery



Z liter swojego imienia Astrid ułożyła 5 równań. Kryją one 6-cyfrowy kod do sejfu.

$A + S = T$

$R + I = A$

$A - S = D$

$D \times D = I$

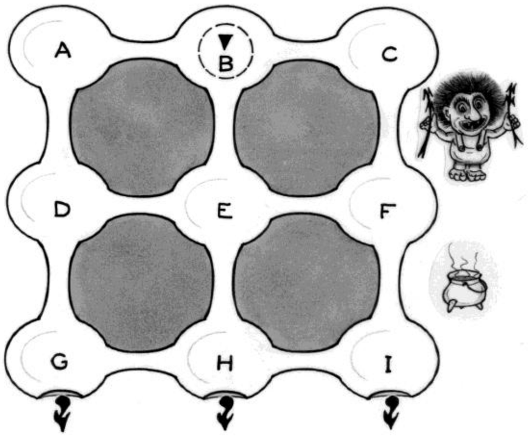
$T : D = I$

Każda litera imienia odpowiada innej cyfrze kodu. Cyfry w kodzie występują w tej samej kolejnosci, w jakiej odpowiedające im litery występują w imieniu.

Znajdź kod Astrid. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7. (7 pkt.) Za dużo tych trolli

Trafiłeś do labiryntu, w którym znajdują się trolle – stworzenia odpychające i niebezpieczne.



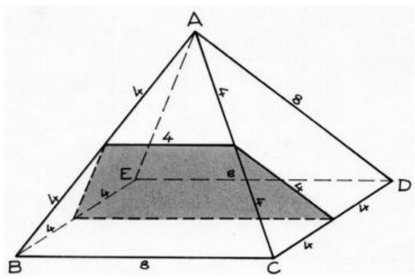
Chcesz się z niego wydostać i nie dać się złapać. Masz do dyspozycji plan labiryntu, 20 eliksirów o cudownej mocy oraz następujące informacje:
- jest 9 sal, w których znajdują się 72 trolle,
- 11 z nich przebywa w sali *C*,
- sala B, w której się znajdujesz, jest pusta,
- suma liczb trolli znajdujących się w salach leżących wzdłuż linii prostej (w pionie, poziomie lub po przekątnej) jest zawsze taka sama,
- jeden cudiowny eliksir pozwala unieruchomić jednego trolla,
- z sali można wyjść tylko wtedy, gdy wszystkie znajdujące się w niej trolle są unieruchomione;
- wyjścia znajdują się w salach *G*, *H* oraz *I*.

Którą drogę należy wybrać, aby wydostać się z labiryntu? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9. (7 pkt.) Bryła w kawałkach

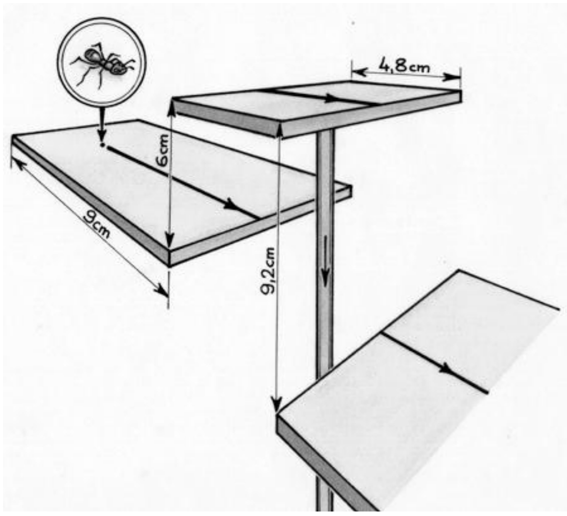
Ostrosłup kwadratowy o wierzchołku *A* i podstawie *BCDE* podzielono płaszczyzną, która przechodzi przez środki krawędzi *CA*, *CD*, *BA* i *BE*. Otrzymano dwie bryły: sześcioscian i pięciościan. Wymiary na rysunku podano w centymetrach.

Narysuj siatki obu brył.



Zadanie 8. (5 pkt.) Zabawa na platformie

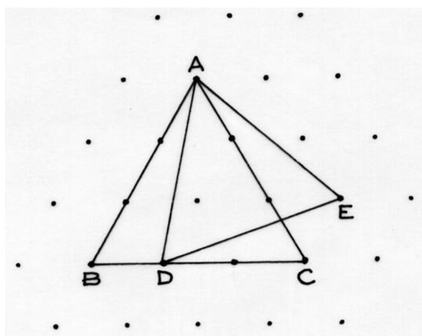
Mrówka porusza się ze stałą predkością wzdłuż linii prostej biegnącej środkiem toru z rysunku.



Jego środkowa część jest ruchoma i zjeżdża w dół ze stałą prędkością. W chwili gdy mrówka znajduje się 9 cm od brzegu szybu, ruchoma platforma o szerokości 4,8 cm wystaje o 6 cm ponad początkowy odcinek toru i o 9,2 cm ponad jego końcowy odcinek. Mrówka nie może podskakiwać ani zeskakiwać w pionie.

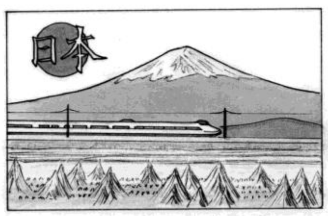
Czy jest możliwe, aby pokonała cały tor? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 10. (10 pkt.) Trójkąty na geoplanie



Na siatce trójkątów równobocznych narysowano dwa trójkąty: *ADE* i *ABC*.

Jaki jest stosunek pól tych trójkątów? Odpowiedź uzasadnij.



Zadania dodatkowe dla I klas szkół ponadgimnazjalnych

Zadanie 11. (5 pkt.) Które kółka są lepsze?

Do 2012 roku średnica kół rowerów terenowych dla dorosłych wynosiła 26 cali. W 2015 roku producenci zmienili rozmiar kół i odtąd rowery są wyposażone w koła 27,5-calowe lub 29-calowe.
Gdy koło o pormieniu *R* napotka przeszkodę o wysokości *h*, rowerzysta musi włożyć pewnien wysiłek, aby sobie z nią poradzić. Im mniejszy jest kąt α, tym większy jest wysiłek rowerzysty.

Dla przeszkody o wysokości *h* = 8 cali, oblicz kąt α dla każdej z trzech długości średnic.

Zadanie 12 (7 pkt.) Wolne – równe – bratnie (ułamki)

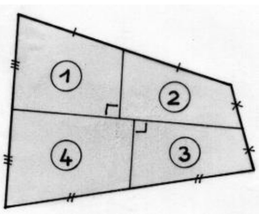
$$\frac{9}{5} + \frac{3}{5} = \frac{93}{55} + \frac{39}{55}$$

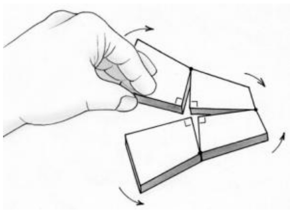
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ab}{cc} + \frac{ba}{cc}$$

Oto tablica przedstawiająca dwie równości. Pierwsza – arytmetyczna - jest dość zadziwiająca.
Uzasadnij jej prawdziwość.

W drugiej równości litery *a*, *b* i *c* oznaczają cyfry.
Uzasadnij, że równość ta jest prawdziwa, dla dowolnych wartości *a*, *b*, *c* pod warunkiem, że c jest różne od 0.

Zadanie 13 (10 pkt.) Przepis na sukces
(dla I klas szkół ogólnokształcących)





Jak obliczyć pole dowolnego czworokąta wypukłego?
Oto zabieg pozwalający na odkrycie wzoru:
„Narysuj czworokąt wypukły i zaznacz środki jego czterech boków. Zaznacz na czerwono odcinek łączący środki dwóch przeciwległych boków. Zaznacz na zielono odcinek prostopadły do odcinka czerwonego, który przechodzi przez inny środek. Następnie narysuj na niebiesko odcinek prostopadły do odcinka czerwonego, który przechodzi przez czwarty środek. Przetnij czworokąt na cztery części wzdłuż kolorowych odcinków. Złóż te części tak, aby otrzymać prostokąt, którego pole będzie można łatwo obliczyć."

Udowodnij, że otrzymana figura jest prostokątem.
Przyklej ten prostokąt na karcie odpowiedzi.
Narysuj inny czworokąt wypukły. Wskaż odcinki, które należy w nim zmierzyć i zapisz ogólny wzór na pole czworokąta wypukłego.

Zadanie 13. (10 pkt.) Zabójstwo z zimną krwią
(dla I klas szkół zawodowych)

Dokonano potwornej zbrodni. Pozostawione ślady wskazują na to, że pani Pilton została zamordowana w chwili, gdy wkładała torebkę herbaty do szklanki wrzącej wody. Eksperci MbG przybyli na miejsce o godz. 17.12 i stwierdzili, że herbata ma temperaturę 30°. Specjaliści z laboratorium ustalili, że jeśli odnotowana temperatura wody wynosi *T*, wówczas minutę wcześniej wynosiła ona

$$\frac{107 \cdot T - 141}{100}$$

Dzięki tym wskazówkom określ godzinę zbrodni.
Akceptowane będą wszystkie poprawne rozwiązania, w tym uzyskane za pomocą arkusza kalkulacyjnego.