Zadanie 1 (7 punktów) **Co za pies!**

Razem z psem poruszamy się ze stałą prędkością (każde z nas inną). Pies wyprzedził mnie w połowie drogi. Wykonał półtora okrążenia, podczas gdy ja przebiegłem połowę drogi. Jego szybkość jest, więc trzykrotnie większa od mojej. Gdyby pies biegł w przeciwnym kierunku do mojego, minęlibyśmy się po raz pierwszy w jednej czwartej drogi, po pokonaniu przez niego trzech czwartych tej drogi. Potem miniemy się jeszcze dwa razy (przy każdej kolejnej ćwiartce) zanim powrócimy do miejsca startu. Zatem minęlibyśmy się **trzy razy.**

Zadanie 2 (5 punktów) **Rozliczmy się**

Każdy musi wydać 39 € i Julekmusi zwrócić Cissé 15 €. Minimalnie mamy trzy transakcje. Oto dwa rozwiązania:

Juliusz daje Luizie 36 €, Cissé daje Luizie 21 €
i Milenie 3 € albo Cissé daje Luizie 24 €,
Juliusz daje Luizie 33 € i Milenie3 €.

Zadanie 3 (7 punktów) **Warkoczowe ABC**

Sekwencje dwóch znoszących się operacji to: AC (podana w zadaniu) **CA, BD i DB.**

Najpierw upraszczamy ciąg **D(~~D(AC)B~~)AA(~~AC~~)D(~~D(CA)B~~)A(~~BD~~)=DAADA.**

Zatem, aby rozpleść warkocz Pierricka należy dopisać sekwencję **CBCCB.**

Zadanie 4 (5 punktów) **Liczmy razem**

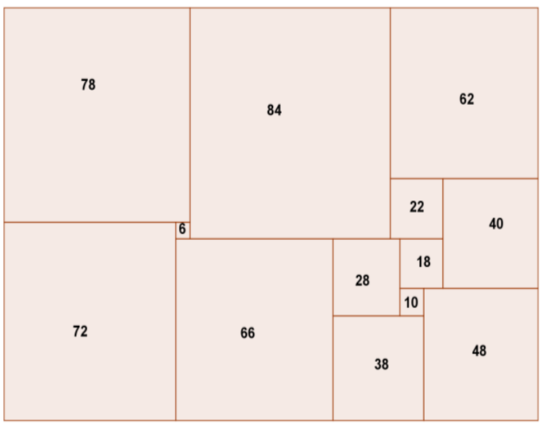
Rozwiązaniem równania $2012–5n = 1024+3n$ jest $n = 123{,}5$. Weźmiemy więc pod uwagę liczby 123 i 124. Najbliższymi wypowiedzianymi liczbami będą zatem: **1397 i 1393** lub **1392 i 1396.**

Zadanie 5 (7 punktów) **Po deszczu**

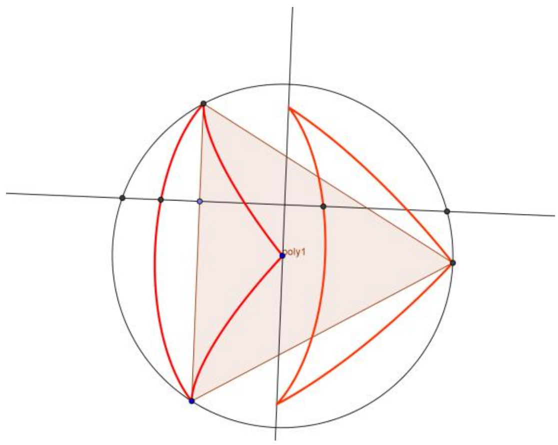
Obliczamy objętość wody zgromadzonej w basenie i otrzymujemy 106000 cm^3 = 106 l.

Liczbę litrów przypadających na metr kwadratowy obliczamy dzieląc znalezioną objętość przez pole powierzchni dna basenu równe $(1{,}7)^2=2{,}89$ m^2. Otrzymujemy zatem około **36,7 l wody na jeden m^2.**

Zadanie 6 (5 punktów) **Kwadraty są OK.**

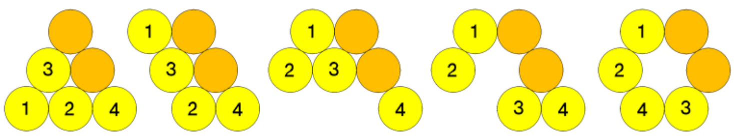


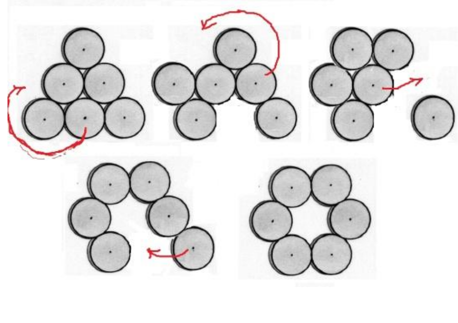
Zadanie 7 (7 punktów) **Niczym bliźnięta dwujajowe**



Zadanie 8 (5 punktów) **Sześć beztroskich monet**

Oto dwa rozwiązania złożone z czterech ruchów.

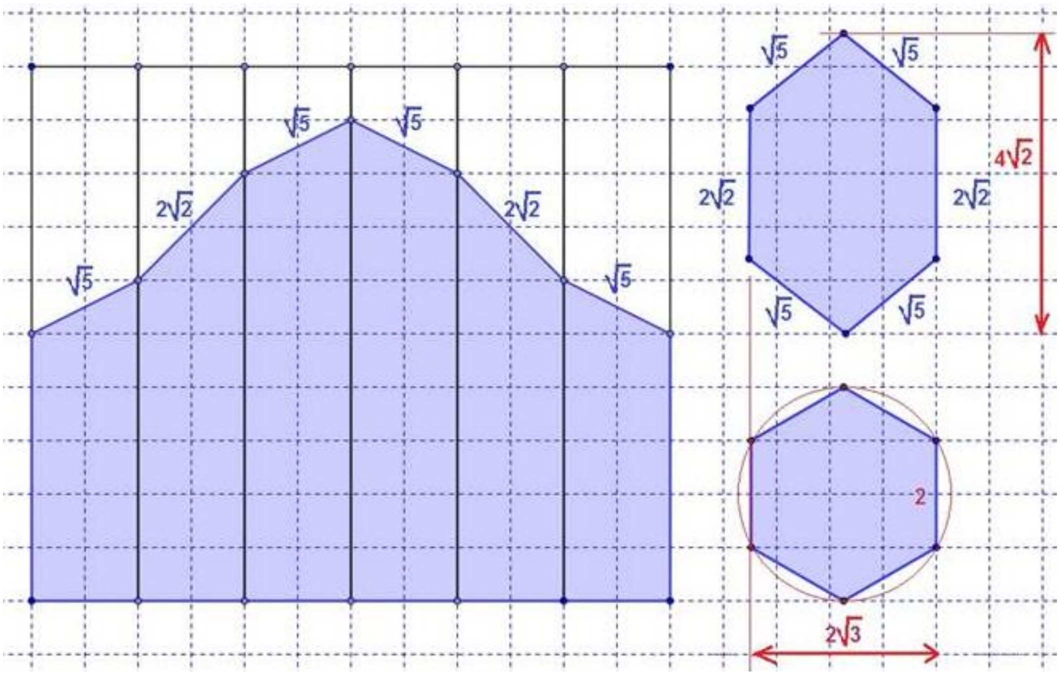




Zadanie 9 (7 punktów) **Możesz lub nie możesz**

Należy znaleźć wszystkie trójkąty o obwodzie równym 21 i bokach wyrażonych liczbami całkowitymi. Ich istnienie wynika z nierówności trójkąta. Oto dwanaście rozwiązań tego zadania:
(10; 10; 1), (10; 9; 2), (10; 8; 3), (10; 7; 4), (10; 6; 5), (9; 9; 3), (9; 8; 4), (9; 7; 5), (9; 6; 6), (8; 8; 5), (8; 7; 6), (7; 7; 7).

Zadanie 10 (10 punktów) **Krystalografia**



Nie wymaga się obliczenia długości boków; podane długości są jedynie wskazówką, mającą ułatwić sprawdzanie prac.

Zadania dla klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej

Zadanie 11 (5 punktów) **Zwolnienie warunkowe**

Jeśli w każdym dzbanie znajduje się jednakowa liczba białych i czarnych kulek, to prawdopodobieństwo oswobodzenia wyniesie ½. Przy każdym innym rozłożeniu kulek, prawdopodobieństwo oswobodzenia będzie większe niż od ½, jeśli strażnik wybierze „dobry" dzban i niższe od ½, jeśli wybierze „zły". Jeśli więzień włoży do jednego dzbana tylko jedną białą kulkę, a wszystkie pozostałe do drugiego,to prawdopodobieństwo wynosi odpowiednio 1/1 i 11/23. Takie rozłożenie kulek optymalizuje prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo oswobodzenia wynosi więc $\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{11}{23}=\frac{17}{23}$.

Zadanie 12 (7 punktów) **Jakim krokiem?**

Gdy wchodzimy na n-ty stopień, to znaczy, że opuściliśmy stopień n–1 lub stopień n–2, w zależności od tego czy stawiamy małe, czy duże kroki.
Jeśli u_n jest liczbą sposobów wejścia na n-ty stopień, to otrzymujemy równanie rekurencyjne:
$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. W tym przypadku $u_1=1$ i $u_2=2$, stąd następujące wartości:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**
u_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	**377**

Rozpoznajemy ciąg Fibonnacciego.

Zadanie wyłącznie dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum

Zadanie 13 (10 punktów) **Tak się składa**
Gdy kubek jest rozłożony, można udowodnić, korzystając z podobieństwa figur lub z twierdzenia Talesa, że każdy element zakrywa ćwierć wysokości poprzedniego. Wysokość wewnętrzna kubka jest więc równa 80 mm. Aby oszacować jego pojemność, można przyrównać kubek do ściętego stożka i skorzystać z podanego wzoru $V=\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rR+R^2\right)$, otrzymując $V\approx 165457$ mm³ $\approx$ 165 cm³.

Obliczając objętość każdego elementu osobno, otrzymujemy dokładniejszy wynik, tzn. $V\approx 164703$ mm³ $\approx$ 165 cm³

Proponowany podział jest więc niemożliwy.

(Ogólnie rzecz biorąc, podział kwadratu na 5 trójkątów o jednakowej powierzchni jest niemożliwy.

Zadanie wyłącznie dla 1. klas zawodowych):

Zadanie 13 – 10 punktów: **Wisi w powietrzu, że ... leży na polu**
Zbiorem rozwiązań są dwie proste zaznaczone na czerwono na rysunku poniżej.