

Matematyka Bez Granic



Etap wstępny - Edycja 2013

- * Rozwiązanie każdego zadania należy przedstawić na osobnym arkuszu odpowiedzi (arkusz formatu A4)
- * Wszystkie, nawet częściowe rozwiązania zadań, zostaną wzięte pod uwagę przez sprawdzających.
- * Staranność wykonania będzie również punktowana.

Mathématiques
SANS
Frontières

2013 matematyka
BEZ GRANIC
GRUPA SZKÓL MIĘDZYKLASOWYCH MATEMATYK
MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

rok zał. 1919
ptm

Zadanie 1 (7 punktów) Co za pies!

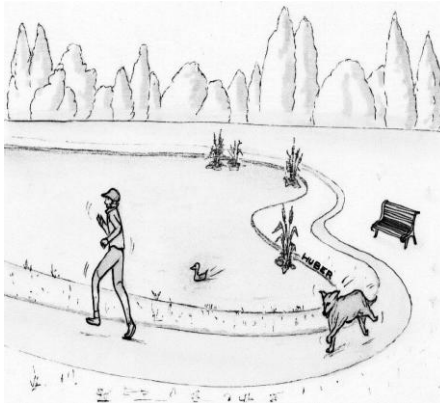
Zredaguj odpowiedź w języku francuskim, niemieckim, angielskim, hiszpańskim lub włoskim używając co najmniej 30 słów.

Mon chien et moi, nous sortons ensemble et dans la même direction pour faire le tour du lac. Nous prenons le même chemin, chacun de nous à une vitesse constante. Cependant, mon chien va suffisamment plus vite que moi et me dépasse une fois avant de que nous arrivions, tous les deux, au même moment, à notre point de départ. Et si mon chien avait tourné en rond autour du lac à la même vitesse, mais dans la direction opposée, combien de fois je me croiserais avec lui? Explique-le.

My dog and I set out together to go round the lake. We left at the same time from the same starting point, we both took the same path in the same direction and we travelled at a constant speed. But my dog goes much faster than I do and he passed me once before we arrived back at the same time at the starting point. What if my dog had gone round the lake at the same speed but in the other direction, how many times would he have passed me? Explain your answer

Mi perro y yo salimos juntos y en el mismo sentido para dar la vuelta al lago. Tomamos el mismo camino, cada uno a una velocidad constante. Pero mi perro va bastante más rápido que yo y me adelanta una vez antes de que lleguemos los dos, en el mismo instante, a nuestro punto de partida. Y si mi perro hubiese dado vueltas alrededor del lago a la misma velocidad, pero en sentido contrario, ¿cuántas veces me cruzaría con él? Explícalo.

Mein Hund und ich starten gemeinsam in gleicher Richtung zu einer Tour um den See. Wir nehmen den gleichen Weg, jeder mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Aber mein Hund läuft schneller als ich und überholt mich einmal bevor wir wieder gleichzeitig an unserem Ausgangspunkt ankommen. Wenn nun mein Hund mit der gleichen Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung den See umrundet hätte, wie viele Male hätte er dann meinen Weg gekreuzt? Begründet eure Antwort.

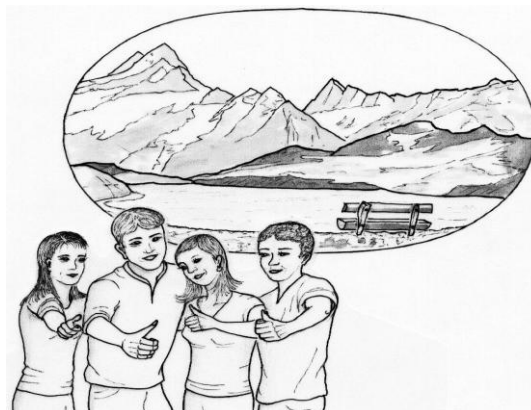


Il mio cane ed io ci avviamo assieme per fare il giro del lago nel medesimo senso. Imbocchiamo il medesimo cammino, ciascuno con una velocità costante. Il mio cane, però, è più veloce di me e mi supera una volta prima che si arrivi assieme nello stesso istante al punto della nostra partenza. E se il mio cane avesse girato attorno al lago alla stessa velocità precedente, ma in senso inverso, quante volte mi avrebbe incrociato? Spiegate la risposta.

Zadanie 2 (5 punktów) Rozliczmy się

Czworo przyjaciół: Luiza, Milena, Juliusz i Cissé wraca samochodem z wakacji i podlicza poniesione koszty. Luiza wydała 96 € paliwo. Milena wydała 42 € na płatne autostrady. Juliusz wydał 18 € na przekąski dla wszystkich. Cissé pożyczył Juliuszowi 15 € na prezent dla mamy. Przyjaciele chcieliby podzielić się sprawiedliwie kosztami, wykonując jak najmniejszą liczbę transakcji.

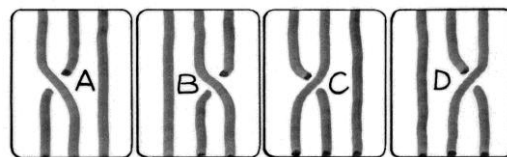
Wyjaśnij, jak powinni się do tego zabrać.



Matematyka Bez Granic

Zadanie 3 (7 punktów) Warkoczowe ABC

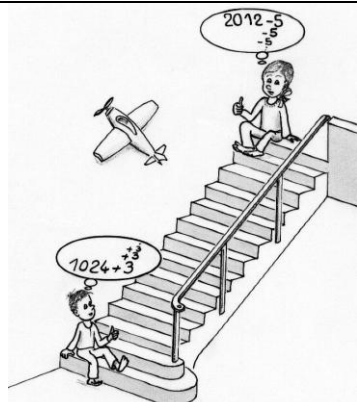
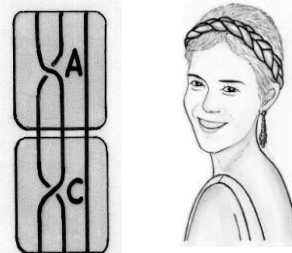
Cindy i Pierrick dysponują urządzeniem programowalnym do zaplatania różnego rodzaju warkoczów z trzech pasem włosów. Aby otrzymać warkocz, należy ułożyć odpowiednią kolejność operacji, wybranych spośród czterech



przedstawionych na rysunku obok: A, B, C i D. Przyjaciele zauważyli, że C neutralizuje A, ponieważ sekwencja AC daje trzy równoległe, rozplątane pasma (co zauważymy przy pociągnięciu włosów). **Zapisz wszystkie sekwencje dwóch neutralizujących się operacji.**

Pierrick wybrał przypadkowo sekwencję DDACBAAACDDCABABD.

Podaj kombinację pięciu operacji, które wystarczy do niej dopisać, aby rozplątać jego warkocz.



Zadanie 4 (5 punktów) Liczmy razem

Michalina i Michał liczą jednocześnie i w tym samym rytmie. Michalina zaczyna od 2012 i odejmuje za każdym razem 5: « 2012, 2007, 2002, 1997 ... ».

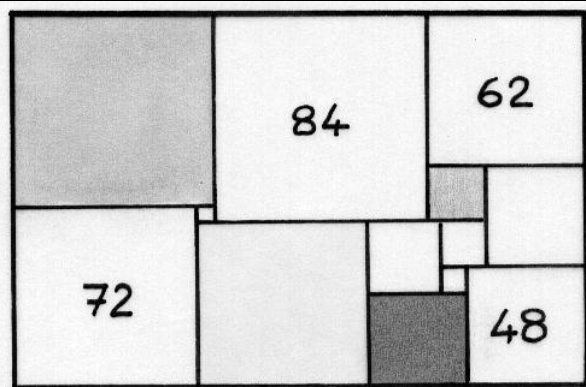
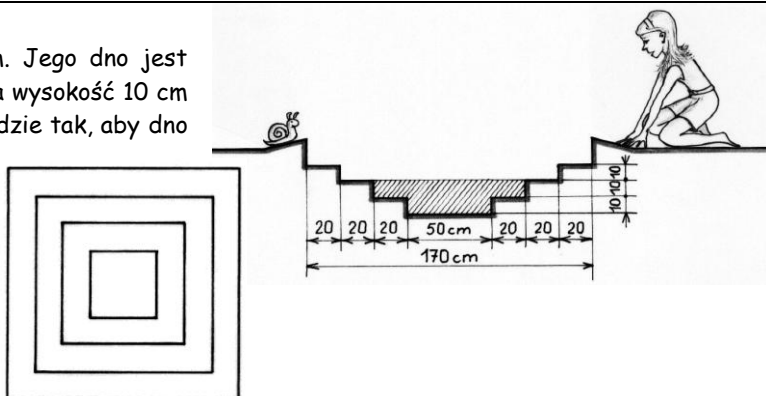
Michał zaczyna od 1024 i dodaje za każdym razem 3 « 1024, 1027, 1030, 1033 ... »

Wyjaśnij, jakie najbliższe liczby wypowiedzą jednocześnie.

Zadanie 5 (7 punktów) Po deszczu

Coralie zbudowała mały basen o układzie schodkowym. Jego dno jest kwadratem o boku 50 cm. Każdy z trzech schodków ma wysokość 10 cm i szerokość 20 cm. Coralie ustawia basen w swoim ogrodzie tak, aby dno było dokładnie w poziomie; wtem zaczyna grzmieć i rzęsiście padać... Po deszczu wypogadza się i Coralie stwierdza, że poziom wody zgromadzonej w basenie sięga drugiego stopnia.

Podaj objętość deszczu, który spadł podczas tej burzy, w litrach na metr kwadratowy.



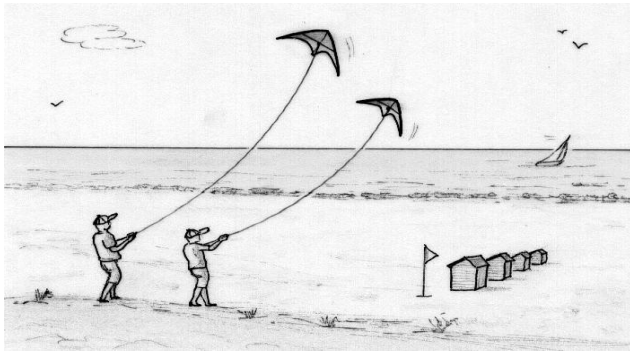
Zadanie 6 (5 punktów) Kwadraty są O.K.

Rysunek obok przedstawia prostokąt złożony z 13 kwadratów. Długości boków tych kwadratów, wyrażone w milimetrach, są liczbami całkowitymi, a każda z nich jest inna. Każda z czterech podanych liczb, oznacza długość boku kwadratu, w który została wpisana.

Znajdź długości boków pozostałych kwadratów.

Narysuj figurę w skali 1 : 1 i podaj długości boków wszystkich kwadratów.

Matematyka Bez Granic



Zadanie 7 (7 punktów) Niczym bliźnięta dwujajowe

Narysuj trójkąt równoboczny ABC wpisany w okrąg c o promieniu 8 cm. Niech P będzie punktem na boku trójkąta ABC . Prosta prostopadła do (BC) przechodząca przez punkt P przecina okrąg c w punktach E i F . Punkt M jest środkiem $[EP]$, a punkt N środkiem $[FP]$.

Wyznacz punkt po punkcie krzywe opisane przez punkty M i N , dla P przebiegającego przez trzy boki trójkąta ABC .

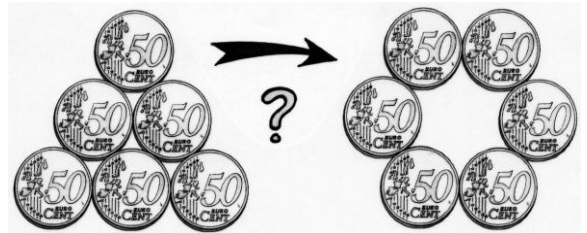
Zadanie 8 (5 punktów) Sześć beztrójkątnych monet

Sześć jednakowych monet ułożono w kształcie trójkąta w sposób przedstawiony na rysunku po lewej stronie. Bernard opracował sekwencję pięciu ruchów, dzięki którym można ułożyć monety w sześciokąt, przedstawiony na rysunku po prawej stronie.

Jeden z ruchów polega na przełożeniu jednej monety bez poruszenia pozostałych tak, aby zetknęła się z dwiema innymi monetami.

Suzette znalazła rozwiązanie składające się z czterech ruchów.

Narysuj 6 kolejnych pozycji rozwiązania składającego się z 5 ruchów, wzorując się na Bernardzie, lub najlepiej - 5 kolejnych pozycji rozwiązania składającego się z 4 ruchów, wzorując się na Suzette.

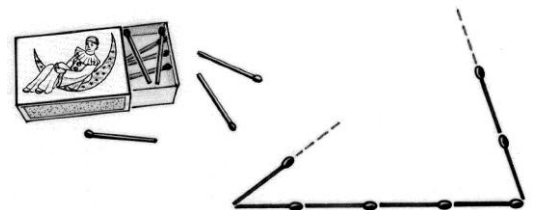


Zadanie 9 (7 punktów) Możesz lub nie możesz

Mamy 21 zapatek jednakowej długości. Układamy część zapatek jedna za drugą. Pozostałymi zapatkami uzupełniamy figurę tak, aby powstał trójkąt.

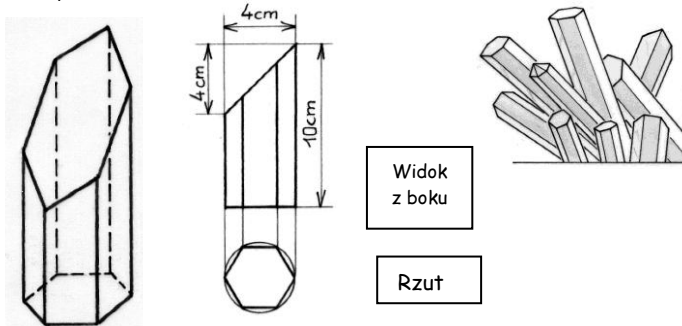
Ile różnych trójkątów można zbudować z 21 zapatek każdy?

Zapisz wszystkie możliwe rozwiązania



Zadanie 10 (10 punktów) Kryształografia

graniastosłup



Kryształki kwarcu mają często kształt graniastosłupa o podstawie sześcioboku.

Obok na rysunku przedstawiono graniastosłup, którego podstawą jest sześciobok / sześciokąt foremny o boku 2 cm.

Graniastosłup został przecięty w górnej części pod kątem 45° w stosunku do podstawy.

Narysuj siatkę powierzchni bocznej i powierzchni sześciobocznych / sześciokątnych podstaw tego graniastosłupa w skali $1 : 1$.

Matematyka Bez Granic

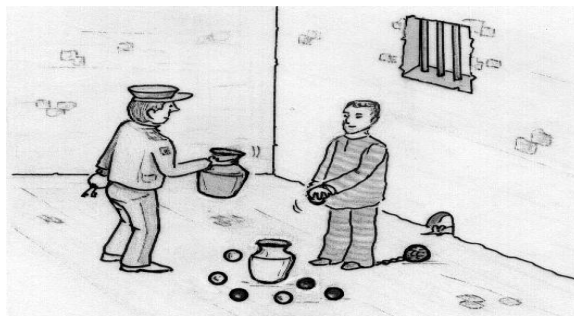
Zadania dla uczniów pierwszej klasy szkoły ponadgimnazjalnej

Zadanie 11 (5 punktów) Zwolnienie warunkowe

Więzień prosi o ulaskawienie. Strażnik daje mu nadzieję na wolność: przynosi dwa dzbanki oraz 12 białych i 12 czarnych kulek. Więzień musi odpowiednio rozmieścić kulki w dzbankach. Strażnik wybiera losowo jeden dzban, a następnie wyciąga z niego jedną kulkę. Jeśli kulka będzie biała, więzień zostanie wypuszczony na wolność.

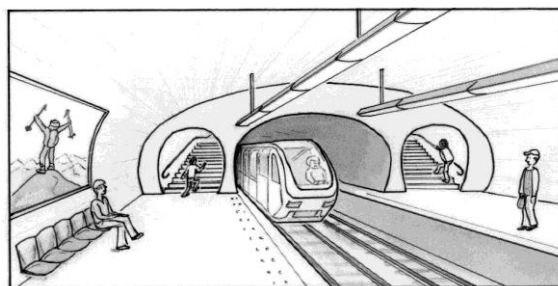
W jaki sposób więzień powinien rozmieścić kulki w dzbankach, aby mieć jak największe szanse na oswobodzenie?

Oblicz prawdopodobieństwo oswobodzenia więźnia dla podanego rozmieszczenia



Zadanie 12 (7 punktów) Jakim krokiem?

Czekając na stacji metra na przyjaciółkę Julię, Łukasz obserwuje ludzi, którzy kierując się ku wyjściu, wchodzą na ruchome schody. Zastanawia się, na ile sposobów można je pokonać, wchodząc albo po jednym, albo po dwa stopnie. „Jeśli schody mają dwa lub trzy stopnie, rozwiązanie nie stanowi problemu. Lecz jeśli mają ich 4? Hm, przy pierwszym kroku mam dwie możliwości, a potem pozostają mi jeszcze albo dwa, albo trzy stopnie..” „Ziemia do Łukasza!” - odzywa się Julia, której chłopiec nawet nie zauważył. „Szybko, już jesteśmy spóźnieni!”



Na ile sposobów można wejść po trzynastostopniowych schodach? Przedstaw odpowiednie strategie.

Zadanie 13 (10 punktów) (wyłącznie dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum) : Tak się składa

Nikola jest przewidująca: nosi w torebce składany kubek, gotowy do użycia, jeśli nadarzy się ku temu okazja. Kubek Nikoli jest zbudowany z podstawy i pięciu stożkowatych elementów z plastiku. Elementy te mogą zachodzić jeden na drugi (rysunek 1), tworząc szczelny, składany pojemnik (rysunek 2).

Schemat poniżej przedstawia pojemnik po złożeniu. Wewnętrzne średnice najmniejszego elementu wynoszą 30 i 38 mm. Promienie każdego elementu są o 4 mm dłuższe od odpowiadających im promieni poprzedniego elementu oraz wysokość wynoszącą 20 mm. Grubość wszystkich ścianek jest jednakowa.

Jaka jest wewnętrzna wysokość rozłożonego kubka?

Wyjaśnij. Oszacuj, ile płynu może się zmieścić w kubku.

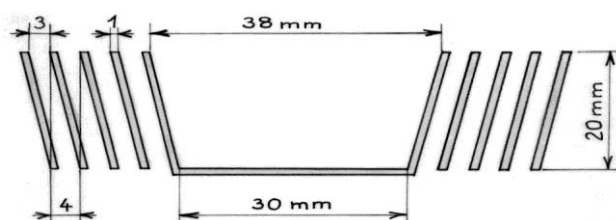
Podaj sposób obliczeń oraz otrzymaną dzięki niemu objętość.



Rys. 1



Rys.2



Przypominamy wzór na obliczenie objętości stożka ściętego

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rR + R^2)$$

o promieniach r i R i wysokości h :

Zadanie 13 - 10 punktów (wyłącznie dla 1. klas zawodowych): Wisi w powietrzu, że ... leży na polu

$[AB]$ i $[CD]$ są odcinkami dwóch prostych równoległych, odległych od siebie o 5 cm. Ich długości wynoszą: $AB = 4$ cm i $CD = 6$ cm.

Szukamy zbioru takich punktów M na płaszczyźnie, dla których trójkąty ABM i CDM będą miały takie same pola. Zbuduj odcinki $[AB]$ i $[CD]$, a następnie odszukaj zbioru punktów, w którym możesz umieścić M . Do rozwiązania tego zadania gorąco polecamy użycie narzędzia informatycznego. Szczegółowo opisz wykonywane czynności. Potwierdź u nauczyciela, że otrzymałeś figurę, w której pola obu trójkątów są równe.

