Etap finałowy konkursu MbG Senior - edycja 2016/2017

Zadanie 1. (7 punktów) Nieuporządkowane rzędy

Propozycja rozwiązania:

Niech n oznacza liczbę krzeseł w rzędzie. Sala konferencyjna ma $9n$ krzeseł. Podczas pierwszej konferencji zajęto dwie trzecie krzeseł, czyli $6n$.

Podczas drugiej konferencji brało udział trzy czwarte uczestników, czyli $4{,}5n$.

Z treści zadania wynika, że tylko całe rzędy krzeseł są usuwane z sali konferencyjnej, zatem musimy pozostawić w sali pięć rzędów krzeseł, aby podczas drugiej konferencji każdy jej uczestnik miał miejsce siedzące.

Zadanie 2. (5 punktów) Shikaku

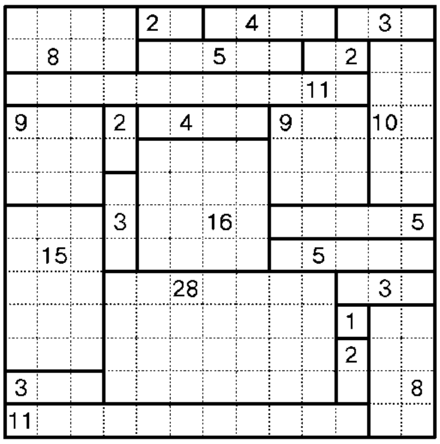
Propozycja rozwiązania:

Musimy przyjrzeć się temu zadaniu.

Można zauważyć, że prostokąt zawierający **1** został już określony, a prostokątem zawierającym **11** może być tylko prostokąt poziomy.

Następnie można przejść do prostokąta zawierającego **8**, który znajduje się na dole po prawej.

Po tych pierwszych krokach okaże się, że zadanie to jest ludyczne



Zadanie 3. (7 punktów) Kręć, kręć, kręć

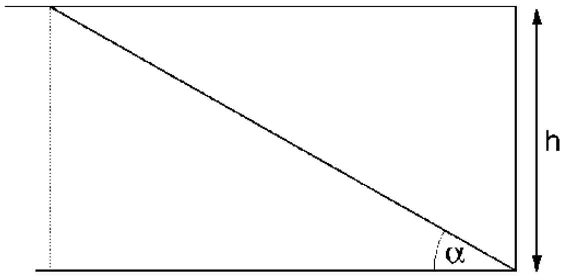
Propozycja rozwiązania:

Interesująca sytuacja paradoksalna.

Kiedy wyobrażamy sobie rozwijanie łańcuchów, żeby je położyć na płasko, ten sam kąt α i ta sama wysokość h określają tę samą długość l łańcucha, czy to łańcuch jest owinięty wielokrotnie na wąskim lub szerokim słupie, czy też starczy go na jedno niecałe owinięcie bardzo szerokiego słupa.

Jeśli rozwijamy łańcuch zachowując kąt α, musi on zawsze osiągnąć wysokość h.

Zatem jego długość wynosi $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ niezależnie od średnicy słupa.



Mamy tę samą długość łańcucha, niezależnie od średnicy słupa, ponieważ wysokość jest taka sama.

Zadanie 4. (5 punktów) Sagrada Familia

Propozycja rozwiązania:

Suma poziomo i pionowo jest stała, co daje już dwie możliwości. Skoro suma przekątnych jest również stała, można znaleźć trzecie rozwiązanie.

Dość łatwo odnajdziemy również cztery kwadraty w każdym rogu, a dzięki sumie czterech środkowych kratek (33), otrzymamy kolejne rozwiązania. itd.

Oto niektóre z nich:

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Jest ich dużo więcej...

Zadanie 5. (7 punktów) O mały włos

Propozycja rozwiązania:

Samochód musi przejechać 7,20 m (2,50 + 4,70) w czasie, w którym ciężarówka pokonuje 18 m (20 – 2), jadąc z prędkością 90 km / h. Korzystamy z zależności $S = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{S}{v}$.

Prędkość minimalna powinna wynieść : $\frac{7{,}20}{v} = t = \frac{20-2}{90}$

Zatem $\frac{7{,}20}{v} = \frac{18}{90}$, czyli $V = \frac{7{,}20 \times 90}{18} = 36\frac{km}{h}$.

Prędkość minimalna wyniesie 36 km / h lub **w m/s** $\boldsymbol{V = \frac{36000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s}}$.

Zadanie 6. (5 punktów) Cerować listę!

Propozycja rozwiązania:

Zaczynamy od zastosowania algorytmu. Otrzymujemy:
3,2; 0,9; 8,1; 6,3; 2,7; 4,5; 0,9;....

Liczba **38.** z listy będzie taka sama jak trzecia liczba, **8,1.**
Liczba **2017**. na liście, jest taka sama jak druga, **0,9.**

Zadanie 7. (7 punktów) Sześcio-ośmiościan

Propozycja rozwiązania:

Tytułowa bryła (sześcio-ośmiościan) ma tyle samo ścian kwadratowych, ile jest ścian w sześcianie (6) i tyle samo ścian trójkątnych, ile jest wierzchołków w sześcianie (8). Liczba wszystkich jego ścian to **6 + 8 = 14.** Aby policzyć liczbę krawędzi, liczymy tylko krawędzie kwadratowych ścian, ponieważ są one zawsze wspólne dla kwadratu i trójkąta. Jest zatem **6 x 4 = 24** krawędzi. Wierzchołki znajdują się zawsze pośrodku krawędzi sześcianu, a każdy środek krawędzi sześcianu jest wierzchołkiem bryły (sześcio-ośmiościanu), więc ich liczba równa jest liczbie krawędzi sześcianu i wynosi **12.** Mamy **12 – 24 + 14 = 2**, zatem wzór Eulera **W – K + S = 2** jest prawdziwy.

Co do obliczenia objętości - rysunek sugeruje, aby obliczyć objętość sześcianu, od której należy odjąć objętość ośmiu czworościanów wyciętych z jego „rogów”:

$$\boldsymbol{V = C^3 - 8 \times \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} \times \frac{c}{2}\right) \times \frac{c}{2}\right] = c^3 - \frac{c^3}{6} = \frac{5c^3}{6}}.$$

Zatem objętość bryły (sześcio-ośmiościanu) wynosi $\boldsymbol{\frac{5c^3}{6}}$.

Zadanie 8. (5 punktów) Zabawa w mnożenie

Propozycja rozwiązania:

Wartości przyznane każdemu wierzchołkowi czworościanu wynoszą odpowiednio:
abc, bcd, abd i acd.

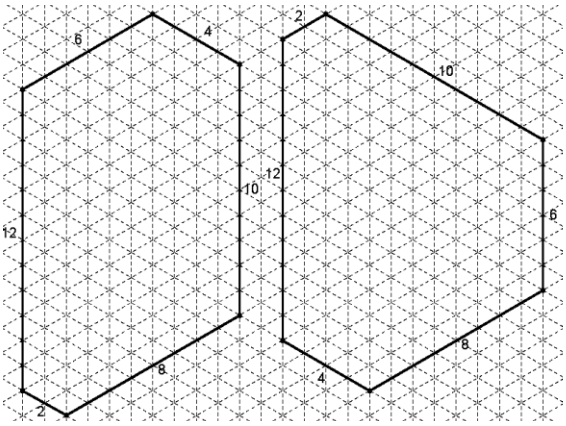
Ich iloczyn wynosi $(\boldsymbol{abc}) \cdot (\boldsymbol{bcd}) \cdot (\boldsymbol{abd}) \cdot (\boldsymbol{acd}) = (\boldsymbol{abcd})^{\mathbf{3}}$ i jest równy, jak podano w treści zadania $27\,000 = 30^3$.

Wnioskujemy stąd, że $\boldsymbol{abcd} = \mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$. Cztery szukane liczby to: $\mathbf{1, 2, 3}\ \boldsymbol{i}\ \mathbf{5}$.

Zadanie 9. (7 punktów) Łap bańkę!

Propozycja rozwiązania:

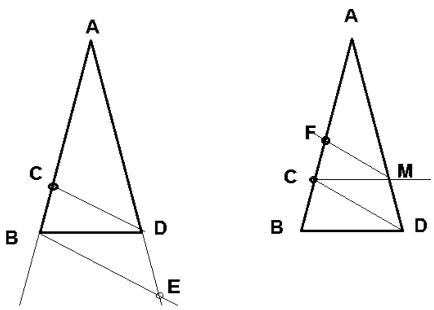
Należy zauważyć, że dwa przeciwległe boki sześcikąta są zawsze równoległe (biorąc pod uwagę kąty 120°). Ułatwienieniem w konstruowaniu sześciokąta byłaby kartka papieru „w trójkąty” tzw. papier izometryczny. Poniżej przedstawione zostały dwa rozwiązania tego zadania



Zadanie 10. (10 punktów) Niech żyje Tales!

Propozycja rozwiązania:

1) W trójkącie ABE z twierdzenia Talesa wynika, że: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AD|}$. Ponieważ $|AB| = |AD| = 1$, więc $\frac{1}{|AC|} = \frac{|AE|}{1}$, a stąd $\frac{1}{|AC|} = |AE|$.



2) Prowadzimy prostą równoległą do (BD) przechodzącą przez punkt C, która przecina (AD) w punkcie M. Następnie prowadzimy przez punkt M prostą równoległą do (CD), która przecina (AB) w punkcie F.

Zatem $|AM| = |AC|$. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy: $\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AD|}$, to znaczy $\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|AC|}{1}$, więc $|AF| = |AC|^2$.

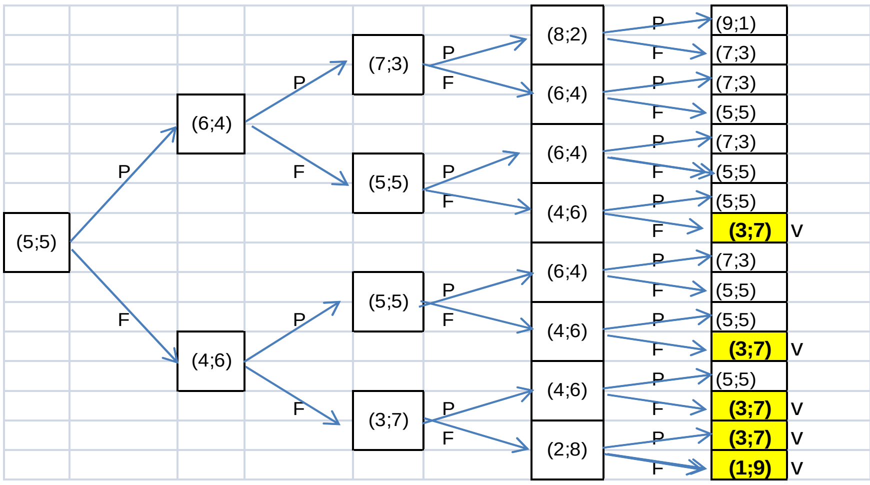
Zauważmy, że jeśli punkt C jest poza punktem B, punkt F poza punktem C, to równości pozostają prawdziwe.

Zadania dodatkowe dla I klas szkół ponadgimnazjalnych

Zadanie 11. (5 punktów) Orzeł czy reszka

Propozycja rozwiązania:

Sytuacja idealna do zastosowania drzewka prawdopodobieństwa.
P przedstawia wygraną Pauliny, a **F** wygraną Franka. Wyniki są przedstawione parami (liczb cukierków Pauliny; liczba cukierków Franka). Zdarzenie **A** –„na koniec gry Franek ma więcej cukierków niż Paulina”
$P(A)=\frac{5}{16}$.
Stwierdzamy: prawdopodobieństwo, że Frank będzie miał więcej cukierków od Pauliny wynosi 5/16.



Można również zauważyć, że Paulina ma takie same szanse na wygraną, co Frank, ale prawdopodobieństwo, że żadne z nich nie wygra jest jeszcze wyższe i wynosi 6/16.

Zadanie 12. (7 punktów) Silnia

Propozycja rozwiązania:

Rozważamy rozkład na czynniki 200!.
Jest on jedyny w swoim rodzaju i zawiera więcej czynników 2, niż czynników 5, ponieważ istnieje o wiele więcej liczb całkowitych parzystych niż wielokrotności liczby 5, mniejszych od 200.
Aby otrzymać czynnik 10, trzeba pogrupować czynnik 2 i czynnik 5. Ponieważ czynniki 2 są w „nadwyżce” wystarczy policzyć czynniki 5.
Jest 40 wielokrotności „5”, mniejszych od 200 (lub równych 200), ale wielokrotności „25” zawierają dwa czynniki 5. Tych jest 8.
Jest również liczba „125”, która zawiera trzy czynniki 5.

$$40 + 8 + 1 = 49.$$

Można pogrupować czterdzieści dziewięć razy czynnik 2 i czynnik 5.
Liczba zer, kończąca zapis dziesiętny 200!, wynosi 49.

Zadanie dla I klas szkół ogólnokształcących

Zadanie 13. (10 punktów) Zagubione działki

Propozycja rozwiązania:

Działka **1** ma powierzchnię **12 x 28 = 336m²**; warunek nie został spełniony. Działka jest nieodpowiednia.

Niech $\boldsymbol{A}$ będzie polem powierzchni działki **2**:

$$\frac{615+519+10\times 27}{27}=\frac{336+644+A}{28}$$

Zatem $\boldsymbol{A}$ **= 476m²**.

Działka **2** jest także nieodpowiednia.

Niech x będzie długością, a $\boldsymbol{B}$ polem powierzchni działki **3**:

$$\begin{cases} B+720=40x \\ \frac{B+420}{x}=\frac{600}{20} \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} B+720+40x \\ B+420=30x \end{cases}$$

Zatem **x = 30m** i ostatecznie **B = 480m²**. Działka **3** również nie jest odpowiednia.

Żadna z trzech działek nie spełnia oczekiwań Mehdiego.

Zadanie dla I klas szkół zawodowych

Zadanie 13. (10 punktów)

Propozycja rozwiązania:

Uznajemy rozwiązanie 120 dB = 60 + 20x3, stąd liczba smartfonów = 2^{20} = 1 048 576.

1 Smartphone	60dB
2	63
4	66
8	69
16	72
32	75
64	78
128	81
256	84
512	87
1024	90
2048	93
4096	96
8192	99
16384	102
32768	105
65536	108
131072	111
262144	114
524288	117
1048576	120