Zadanie 1 (7 punktów) **Widać wyraźnie**

Ze względu na kolor, można przypisać kapelusze na siedem sposobów:

Możliwość	1	2	3	4	5	6	7
Anatol	Cz	Cz	Cz	Cz	Z	Z	Z
Michał	Cz	Cz	Z	Z	Cz	Cz	Z
Tomasz	Cz	Z	Cz	Z	Cz	Z	Cz

Należy wyeliminować trzy przypadki:

- ✓ Przypadek 4 : Anatol odpowiada « nie », gdy widzi 2 zielone kapelusze, to znaczy, że ma czerwony kapelusz, powinien był odpowiedzieć « tak », więc to niemożliwe.
- ✓ Przypadek 6 : Michał odpowiada « nie », gdy widzi 2 zielone kapelusze, to znaczy, że ma czerwony kapelusz, powinien był odpowiedzieć « tak », więc to niemożliwe.
- ✓ Przypadek 2 : nieco zawiły… Michał, widząc na głowie Tomasza kapelusz zielony, myśli sobie: "Gdybym miał zielony kapelusz, to Anatol odgadłby, że ma czerwony i odpowiedziałby TAK. Czyli ja mam czerwony." i Michał powiedziałby TAK, więc to niemożliwe.

W czterech pozostałych przypadkach Tomasz ma czerwony kapelusz, nie musi widzieć koloru kapeluszy, żeby odpowiedzieć TAK.

Zadanie 2 (5 punktów) **Matemagika**

W podanej tabeli suma trzech liczb odpowiadających podanej w zadaniu zasadzie jest zawsze równa 27.

Zauważamy również, że przechodząc z jednej linii do drugiej (jak również z jednej kolumny do drugiej) dodajemy do trzech liczb składowych zawsze tę samą liczbę.

Możemy stwierdzić, że tabelka jest prawidłowa, jeśli odpowiada podanym wcześniej zasadom oraz jeśli liczby wstawione przez uczniów nie powtarzają się.

Zadanie 3 (7 punktów) **Żeby nie zabrakło paliwa**

Mamy do czynienia z dwoma przypadkami:

- ✓ Drugi prostokąt właśnie stał się biały, pozostały, więc dwie trzecie pojemności baku oraz możliwość przejechania 252, 6 × 2 = 505,2 km, z czego trzy czwarte zanim pojawi się informacja „rezerwa", czyli $\frac{3}{4}\times 505{,}2$ = 378,9 km.
- ✓ Trzeci prostokąt stanie się biały zaraz po pojawieniu się informacji, pozostała więc druga połowa pojemności baku i możliwość przejechania 252,6 km, z czego dwie trzecie zanim pojawi się informacja „rezerwa", czyli $\frac{2}{3}\times 252{,}6$ = 168,4 km.

Reasumując, w podanych warunkach można przejechać **minimalnie 168,4 i maksymalnie 378,9 km.**

Mamy do czynienia z dwoma przypadkami:

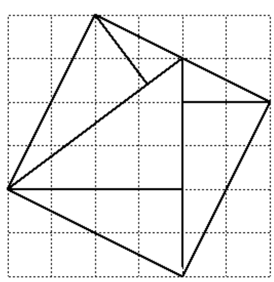
- ✓ Drugi prostokąt właśnie stał się biały, pozostały więc dwie trzecie pojemności baku oraz możliwość przejechania 252, 6 × 2 = 505,2 km, z czego trzy czwarte zanim pojawi się informacja „rezerwa", czyli $\frac{3}{4}\times 505{,}2$ = 378,9 km.

Reasumując, w podanych warunkach można przejechać **minimalnie 168,4 i maksymalnie 378,9 km.**

Zadanie 4 (5 punktów) **Trójkąty w kwadrat**

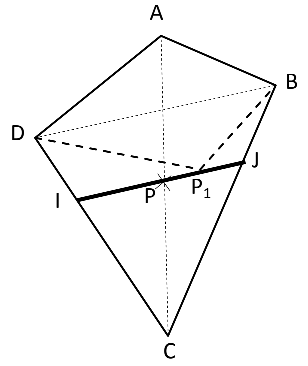
Najpierw moglibyśmy obliczyć pole powierzchni całkowitej podanych trójkątów.

Zauważlibyśmy, że długość boku kwadratu wynosi $\sqrt{20}$ cm jest równa długości przeciwprostokątnej trójkąta o przyprostokątnych 2 cm i 4 cm.



Zadanie 5 (7 punktów) **Sprawiedliwy braterski podział**

P znajduje się w połowie [AC].
Wykorzystujemy następującą własność: Dwa trójkąty o tej samej podstawie i jednakowej wysokości mają takie same pole powierzchni. Stąd trójkąty APD i DPC mają takie same pola powierzchni. To samo dotyczy trójkątów APB i CPB. Stąd wynika, że czworoboki ADPB i DPBC również mają takie same pola powierzchni, więc podział jest sprawiedliwy.
Rozwiązania zaproponowane przez Pawła sprowadzają się do punktów odcinka [IJ] w czworokącie ABCD, przechodzącego przez P i równoległego do [DB].
Wyjaśnienie: Niech P_1 będzie punktem należącym do tego odcinka. Pole powierzchni trójkąta BDP_1 jest równe polu powierzchni trójkąta BDP (co wynika ciągle z tej samej własności). Zatem pole powierzchni czworokąta ABP_1D jest równe polu powierzchni ABPD, to znaczy połowie pola ABCD.



Zadanie 6 (5 punktów) **Powrót na start**

Rozwiązujemy zadanie od końca i tak się szczęśliwie składa, że przypada tylko jedna możliwość na rundę (tylko jedna liczba nieparzysta). Można pomóc sobie tabelką:

	Alex	Klaudiusz	Sam	
Koniec piątej rundy	10	9	8	
Koniec czwartej rundy	5	18	4	Klaudiusz przegrywa
Koniec trzeciej rundy	16	9	2	Alex przegrywa
Koniec drugiej rundy	8	18	1	Klaudiusz przegrywa
Koniec pierwszej rundy	4	9	14	Sam przegrywa
Początek pierwszej rundy	**2**	**18**	**7**	Klaudiusz przegrywa

Zadanie 7 (7 punktów) **W opozycji**

- ✓ Załóżmy, że twierdzenie 1a jest prawdziwe, szukamy liczby dwucyfrowej. To liczba nieparzysta (ponieważ 1b jest w tym wypadku / uznajemy za fałszywe). Jest też kwadratem (2a jest prawdziwe, bo 2b jest fałszywe, szukamy liczby dwucyfrowej). Nieparzyste kwadraty to 25 ; 49 i 81 ; zatem żadna z tych liczb nie potwierdza ani 3a, ani 3b. Stąd sprzeczność, nasza hipoteza jest fałszywa.
- ✓ 1b jest prawdziwe, liczba jest parzysta. Nie może być iloczynem dwóch kolejnych liczb nieparzystych, więc 4a jest fałszywe. Zatem 4b jest prawdziwe, to liczba równa kwadratowi liczby całkowitej plus jeden. Nie może być równa kwadratowi, więc 2a jest fałszywe, a 2b prawdziwe, szukamy liczby trzycyfrowej.
  Na tym stadium poszukiwań, liczbami spełniającymi kryteria są:

$$11^2+1=122 \quad 13^2+1=170 \quad 15^2+1=226 \quad 17^2+1=290$$
$$19^2+1=362 \quad 21^2+1=442 \quad 23^2+1=530 \quad 25^2+1=626$$
$$27^2+1=730 \quad 29^2+1=842 \quad 31^2+1=962$$

Ponieważ wszystkie liczby są parzyste, mają więcej niż dwa dzielniki, więc 3b jest fałszywe, a 3a prawdziwe. W pisowni szukanej liczby jest cyfra 7: tylko 170 i 730 spełniają to kryterium. Żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 11, zatem 5a jest fałszywe, a 5b musi być prawdziwe: $730 = 9^3 + 1$.
Jestem liczbą 730 ! Istnieją oczywiście inne sposoby rozwiązania tego zadania !!!

Zadanie 8 (5 punktów) **Bilard to łatwizna!**

Suma punktów z piętnastu bil to 120.
Suma z sześciu bil z najwyższą liczbą punktów to 75. Bonnie musi więc zdobyć co najmniej siedem bil. Skoro zdobyła mniejszą liczbę bil niż Clyde, ma ich co najwyżej 7. Bonnie zdobyła więc dokładnie 7 bil. Zaczynamy od bil z najwyższą liczbą punktów i dokonujemy odpowiedniego dopasowania. Punkty mogą się rozkładać na 5 możliwych sposobów:

$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 5 = 80$
$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 9 + 6 = 80$
$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 8 + 7 = 80$
$15 + 14 + 13 + 12 + 10 + 9 + 7 = 80$
$15 + 14 + 13 + 11 + 10 + 9 + 8 = 80$

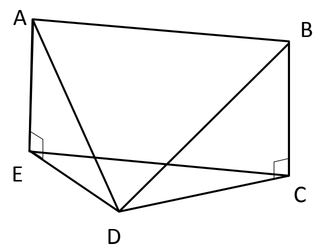
Zadanie 9 (7 punktów) **Tama w Malo**

Lily dociera do A. AE = BC = 5 m, wysokość tamy.
Trójkąt ABD to trójkąt prostokątny równoramienny w B. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $AD = 10\sqrt{2}$, a pochyłość wynosi

$\frac{AE}{AD} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}353$; co odpowiada **nachyleniu 35 %.**

Jeśli nachylenie ma wynosić 25 %, $\frac{AE}{AD} = 0{,}25$; $AD = \frac{5}{0{,}25} = 20$.

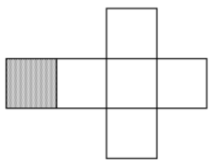
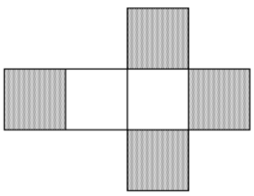
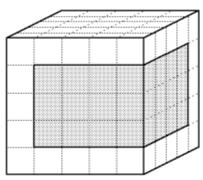
$\cos \widehat{ADB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ i $\widehat{ADB} = 60°$. **Lily będzie musiała się poruszać pod katem 60°w stosunku do najkrótszej drogi.**



Zadanie 10 (10 punktów) **Niezamalowane**

Duży sześcian musi się składać z ponad 48 małych sześcianów.

- ✓ <u>Pierwsza możliwość</u>: 4 małe sześciany wzdłuż każdej krawędzi i 64 małe sześciany ogółem: jeśli pomalujemy na przykład górną ścianę (16 sześcianów), pozostanie 48 bez pomalowanej ściany.
- ✓ <u>Druga możliwość</u>: 5 małych sześcianów wzdłuż każdej krawędzi i 125 małych sześcianów ogółem. Wróćmy do poprzedniego sześcianu – jego niepomalową część można odnaleźć w sześcianie złożonym ze 125 małych sześcianów. Wystarczy pomalować 4 ściany dużego sześcianu, pozostawiając dwie sąsiadujące ze sobą ściany niepomalowane. Poniżej przedstawiono dwie siatki i rysunek wskazujący niepomalowaną część dużego sześcianu.
- ✓

Mathématiques Sans Frontières 2013 matematyka bez granic ptm rok zał. 1919

Zadania dla klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej

Zadanie 11 (5 punktów) **Zgromadzenie MbG**

Wyobraźmy sobie kobiety (K) i mężczyzn (M) siedzących w okręgu.
7 K ma K po lewej stronie: to oznacza, że jest 7 razy KK w tym ciągu, oraz że jest 7 K, które mają K po lewej stronie (co również można przedstawić jako KK).
12 K ma M po prawej stronie: jest 12 razy KM w tym ciągu, czyli jest 12 M, którzy mają K z lewej strony. Po swojej prawej stronie, kobieta ma albo mężczyznę, albo kobietę. Jest więc razem 7 + 12 =19K.
Kobieta ma po swojej lewej stronie albo kobietę, albo mężczyznę. Jest więc 19 – 7 = 12 K, które mają mężczyznę po swojej lewej stronie (co można przedstawić za pomocą MK) i 12 M, którzy mają kobietę po swojej prawej stronie. Tak więc stanowią oni $\frac{3}{4}$ M, których razem jest 16.

Prawdopodobieństwo, że wybór padnie na kobietę wynosi $\frac{19}{35}$.

Zadanie 12 (7 punktów) **Spadek wstępujący**
Niech d będzie średnicą osi (1cm), D średnicą kół (10 cm), α szukanym kątem, a ω – kątem obrotu kół.

Drogę kół na pochylni przedstawimy za pomocą $s_1 = \pi \times D \times \frac{\omega}{360}$.

Równocześnie sznurek z odważnikiem jest skrócony o $s_2 = \pi \times d \times \frac{\omega}{360}$.

Utrata wysokości to $h = s_1 \times \sin\alpha = \pi \times D \times \frac{\omega}{360} \times \sin\alpha$.

Odważnik musi pozostać na tej samej wysokości $h = s_2$, więc $d = D \times \sin\alpha$ i $\sin\alpha = \frac{d}{D} = \frac{1}{10}$.

Otrzymujemy $\alpha \approx 6°$.

Moglibyśmy również rozumować prościej: 1 obrót odpowiada długości koła, czyli 10π; każdy obrót dużego koła powoduje nawinięcie sznurka o π. Mamy więc przypadek trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej równej 10π i przyprostokątnej π. Stąd wyprowadzamy miarę szukanego kąta.

Zadanie 13 (10 punktów) **To jest wpisane (wyłącznie dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum)**
Można zastosować twierdzenie Pitagorasa lub obliczyć pola figur. Po uproszczeniu obliczeń otrzymujemy $xy = 32$. Zatem rozwiązaniami są :

x	y	Miary boków trójkąta
1	32	9 – 40 – 41
2	16	10 – 24 – 26
4	8	12 – 16 – 20

Zadanie 13 (10 punktów) **Banda myszy (wyłącznie dla 1. klas zawodowych)**

Pole powierzchni kawałka, który przypadł szefowi wynosi 9 cm^2; zostało więc 24 – 9 = 15 cm^2 dla pozostałych członków bandy. To oznacza 7,5 cm^2 dla każdego.
Drugiego podziału można dokonać na wiele sposobów.