Zadanie 1: Spotkanie u Khana (7 punktów)

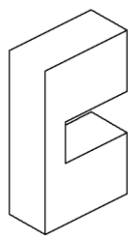
Propozycja rozwiązania:
Jeden z chłopców, powiedzmy Marco, zakłada rolki na początku drogi, pokonuje kilka kilometrów i już uzyskuje przewagę czasową nad Polem. Marco nie uzyska tej przewagi, jeśli zatrzyma się, żeby poczekać na Pola, lub jeśli wróci, żeby mu przekazać rolki. Pozostawi je więc i będzie kontynuował drogę pieszo. Polo założy je po drodze, żeby dogonić Marca. Przy tej strategii, Marco pozostawi rolki w połowie drogi. W ten sposób, każdy z nich pokona 10 km pieszo i 10 km na rolkach. **Marco i Polo przybędą w tym samym czasie do Khana – po upływie 2 godz.30 min.** (i kilku sekund!).
Proponowana skala**:** Jakość redakcji w języku obcym: **4 pkt**; podanie strategii: **3 pkt**.
Cele: Wymyślenie strategii, obliczenie odpowiedniego czasu, zredagowanie odpowiedzi w wybranym języku obcym.

Zadanie 2: Kto może więcej, może mniej (5 punktów)

Propozycja rozwiązania:
Najmniejsza liczba to 18, którą można otrzymać np. jako 1×2+1×4+5+7= 18. **Największa liczba to 560**, otrzymana np. (1+1)×2×4×5×7= 560. (*Wynik można otrzymać w inny sposób*).
Proponowana skala: obliczenie wartości najmniejszej równej 18: **2 pkt**; obliczenie wartości największej równej 560: **3 pkt**.
Cele: Obliczenia na liczbach całkowitych, poszukiwanie wartości najmniejszej i największej.

Zadanie 3: Układanka (7 punktów)

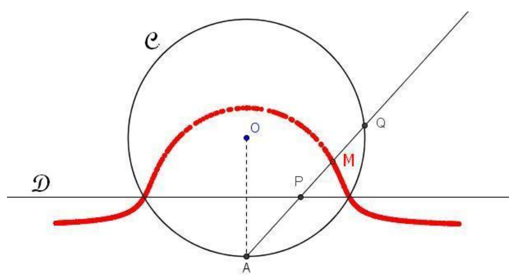
Propozycja rozwiązania:
Istnieje wiele sposobów rozwiązania tego zadania.
Można na przykład rozpocząć od bryły „poziomej”, obliczyć jej objętość (2×8×10=160 cm^3), następnie dodać dwie części bryły „pionowej” o wysokości 10 cm, które „wystają” (2 razy 2×4×8, czyli 2 razy 64, tzn. 128 cm^3). Na koniec dodajemy obie części bryły „pionowej” o wysokości 8 cm. Można zauważyć, że bryła ta składa się z dwóch kawałków przedstawionych obok, (2 części o wymiarach 2×4×8, w każdej z nich „brakuje” jednej części o wymiarach 2×3×2 , czyli 2 razy (64 – 12), więc otrzymujemy 2 razy 52 równe 104 cm^3).



W ten sposób otrzymujemy objętość całkowitą równą : 160 + 128 + 104 = **392 cm^3**.
Proponowana skala: Obliczenie całkowitej objętości bryły równej 392 cm^3: **4 pkt**; uzasadnienie: **3 pkt**.
Cele: Obliczenie objętości bryły, złożonej z brył prostych z przecięciami.

Zadanie 4: Szczęśliwe wydarzenie (5 punktów)

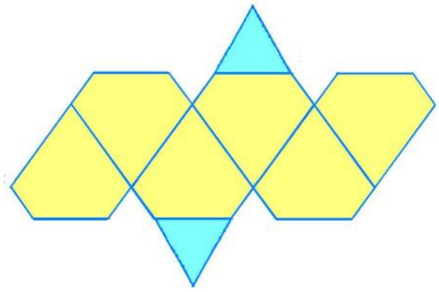
Propozycja rozwiązania:
Krzywa przedstawiona na rysunku obok.



Proponowana skala: Wyznaczenie okręgu i prostej: **1 pkt**; wyznaczenie kilku położeń punktu M: **2 pkt**; ogólny „wygląd” krzywej (symetria, punkty przecięcia, prawidłowe krzywizny): **2 pkt**.
Można odjąć punkty za brak staranności wykonania.
Cele: Wyznaczenie punkt po punkcie krzywej.

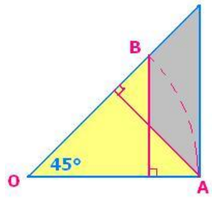
Zadanie 5: Wielościan Dürera (7 punktów)

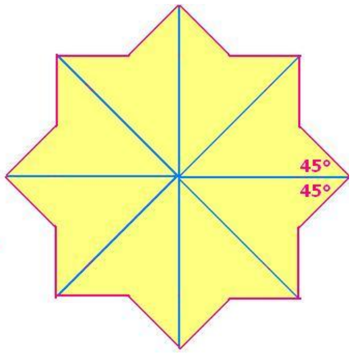
Propozycja rozwiązania:
Przykładowa siatka przedstawiona na rysunku obok.
(*Istnieje wiele możliwych siatek.*)
Proponowana skala: Wykreślenie pięciokąta o prawidłowych wymiarach: 2 pkt; trójkątów równobocznych: 1 pkt; prawidłowy układ ośmiu ścian: 4 pkt.
Należy wziąć pod uwagę precyzję i staranność wykonania.
Cele: Skonstruowanie siatki bryły widzianej w perspektywie.



Zadanie 6: Marokańska mozaika (5 punktów)

Propozycja rozwiązania:
Figura z prawej strony pokazuje złożoną kartkę papieru (na szaro zaznaczono trapez do odcięcia).
Po 3 złożeniach, kąt wynosi 360°:8= 45°.
W ten sposób mamy dwa trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnych *OA* i *OB* i jednym z kątów o mierze 45°, czyli kąty przy wierzchołkach *A* i *B* mają również miarę 45°.
Kiedy rozkładamy kartkę, każdy kąt wielokąta wynosi 2×45°=90°.

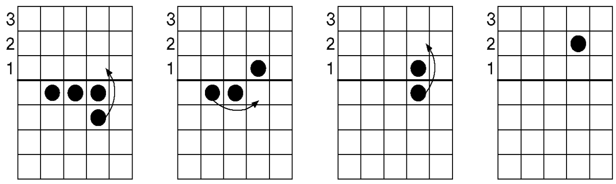


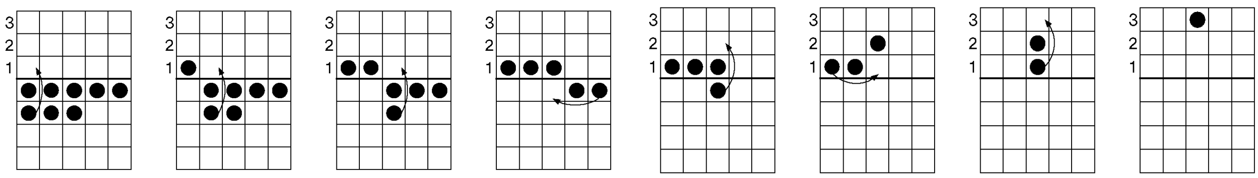


Proponowana skala: Prawidłowe złożenie i przecięcie: 3 pkt; prawidłowe uzasadnienie, ze kąt jest kątem prostym: 2 pkt. *Należy brać pod uwagę precyzję wykonania.*
Cele: Otrzymanie wielokąta poprzez składanie, symetrię osiową; obliczenie kąta.

Zadanie 7: Próba trzeciego wiersza (7 punktów)

Propozycja rozwiązania:
Obok ruchy, które pozwalają na dotarcie do drugiej linii.
Aby dojść do trzeciej linii, potrzeba co najmniej **8** pionków. Oto jedno z rozwiązań:

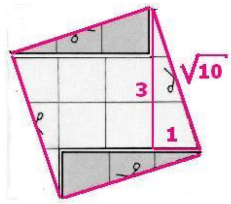




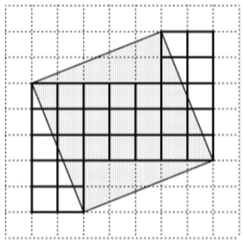
Proponowana skala: Ciąg ruchów, pozwalających na dojście do drugiej linii: 2 pkt; prawidłowo przedstawione ruchy 8 pionków pozwalającymi na dotarcie do trzeciej linii: 5 pkt.
Można przyznać 2 pkt za wskazanie 8 pionków prawidłowo ustawionych, bez ruchów albo więcej niż 8 pionków, wraz z ruchami pozwalającymi na dotarcie do trzeciej linii.
Cele: Badanie strategii gry, analiza przypadków.

Zadanie 8: Cięcia kwadratów (5 punktów)

Propozycja rozwiązania:



Kwadrat, stworzony z 10 pojedynczych kwadratów, ma pole równe 10 cm^2. Jego bok wynosi więc $\sqrt{10}$ cm. Po dokonaniu cięcia mamy (z twierdzenia Pitagorasa): $3^2+1^2=10$. (rysunek obok).
Po stwierdzeniu, że $29=5^2+2^2$, możemy sobie wyobrazić podział połączenia 29 kwadratów, przedstawiony na rysunku poniżej.
W ten sposób ukośne przecięcie daje odcinki o długości $\sqrt{29}$ cm.



Proponowana skala: Odtworzenie kwadratu o boku $\sqrt{10}$: **1 pkt**; prawidłowe połączenie i prawidłowe przecięcie kwadratu o boku $\sqrt{29}$: **4 pkt.**
Cele: Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, rozłożenie 29 na sumę dwóch kwadratów.

Zadanie 9: Po 2010 ? (7 punktów)

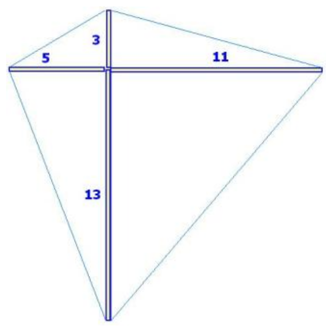
Propozycja rozwiązania:
Po obliczeniu początkowych elementów ciągu można zauważyć okresowe powtarzanie się liczb.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2010	5	$5^2 = 25$	$2^2+5^2 = 29$	$2^2+9^2 = 85$	$8^2+5^2 = 89$	$8^2+9^2 = 145$	$1^2+4^2+5^2 = 42$	$4^2+2^2 = 20$	$2^2+0^2 = 4$	$4^2 = 16$	$1^2+6^2 = 37$	$3^2+7^2 = 58$	$5^2+8^2 = 89$	…

Czternasta liczba jest taka sama, jak szósta. Można zauważyć, że powtórzenia występują okresowo (co 8), tzn. liczby: dwudziesta druga, trzydziesta i trzydziesta ósma to 89. Podobnie liczby: ósma, dwutysięczna oraz dwa tysiące ósma to 42. Ponieważ $2011=2008+3$, więc **liczba dwa tysiące jedenasta wynosi 16.**
Proponowana skala: czwarty i piąty element : **1 pkt;** okresowość równa 8 : **3 pkt**; podanie liczby dwa tysiące jedenastej: **3 pkt**.
Cele: Obliczenie elementów ciągu podanego przez algorytm, odkrycie i wykorzystanie okresowości.

Zadanie 10: Na cztery makarony (10 punktów)

Propozycja rozwiązania:
W każdym trójkącie wysokość poprowadzona z odpowiedniego wierzchołka jest mniejsza lub równa od długości boków przyległych do tego wierzchołka. W ten sposób, dla dwóch sztuk makaronu spaghetti o wspólnym wierzchołku, **największe pole** otrzymamy przy ułożeniu ich pod kątem prostym.
Ponieważ mamy 4 sztuki makaronu, więc możemy postarać się ułożyć 4 trójkąty prostokątne otrzymując w ten sposób czworokąt, którego przekątnymi są kawałki spagetti. Należy zauważyć, że dla ułożenia pokazanego obok otrzymany iloczyn **$(5+11)\times(3+13)$ jest największy.**



Proponowana skala: Otrzymanie maksymalnego pola trójkąta prostokątnego: **2 pkt**; uzasadnienie tego faktu: **2 pkt**; przejście do czworoboku: **1 pkt**; obliczenie pól czterech trójkątów: **1 pkt**. Za rozważenie innych możliwości: **3 pkt;** uzasadnienie wyboru: **1 pkt.**
Cele: Określenie maksymalnego pola trójkąta, podział czworoboku na trójkąty.

Zadania dodatkowe dla 1 klasy szkoły ponadgimnazjalnej

Zadanie 11: Dobrze przewiązane (5 punktów)

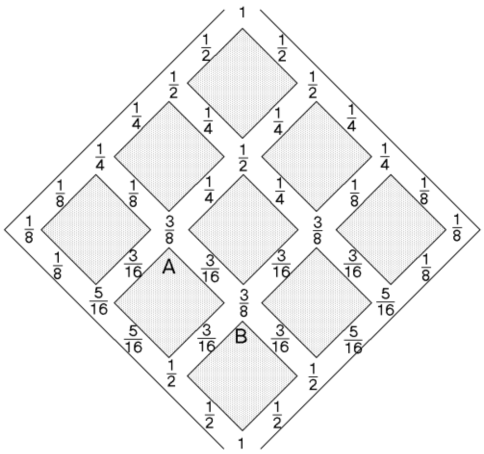
Propozycja rozwiązania:
Niech x będzie długością boku kwadratowej podstawy pudełka, a y – długością wysokości pudełka. Problem sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4x + 4y - 10 = 150 \\ 6x + 2y + 30 = 150 \end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest: $x = 10$ i $y = 30$. Zatem objętość paczki to $V = 10 \times 10 \times 30 = 3\,000$ cm^3.
Proponowana skala: Zapisanie układu równań: 2pkt; rozwiązanie: 2pkt; obliczenie objętości: 1 pkt.
Cele: Ułożenie i rozwiązanie układu równań z dwiema niewiadomymi, obliczenie objętości.

Zadanie 12: Tocz kulkę (7 punktów)

Propozycja rozwiązania:
Na rysunku obok podana jest sieć różnych dróg, którymi mogą toczyć się kulki wraz z prawdopodobieństwem przetoczenia się po każdym odcinku.
Zauważymy, że prawdopodobieństwo, że kulka przejdzie przez skrzyżowanie A wynosi 3/8, podobnie przez skrzyżowanie B również 3/8.
Proponowana skala: P(A)=3/8: 3 pkt; P(B)=3/8: 2 pkt; uzasadnienia 2 pkt.
Cele: Wyznaczenie prawdopodobieństwo zdarzenia.



Zadanie 13: Szybkobieżny pociąg Alberta (10 punktów)

Propozycja rozwiązania:
Zauważmy, że 5 min.=1/12 godz.; zaś 6 min.=1/10 godz.
W momencie, w którym dwa pociągi się mijają, następny pociąg, który minie Albert znajduje się w odległośći d, równej sumie odległości, którą pokona pociąg Alberta, aż do następnego wyminięcia oraz odległości, którą ten drugi pociąg pokona w tym samym czasie. Odległość d jest także odległością pomiędzy dwoma pociągami, które mija Albert i nie zmienia się po zwolnieniu pociągu Alberta.
Kiedy pociągi jadą z prędkością 300 km/h w obu kierunkach, pociągi, które jadą kolejno po sobie, są odległe o $d = 300\times(1/12)+300\times(1/12)=50$ [km] jedne od drugich. Po zwolnieniu pociągu Alberta, oznaczając przez v nową prędkość, mamy: $d = 300\times(1/10)+v\times(1/10)=50$. Stąd **$v$=200 km/h.**
Proponowana skala: Obliczenie prędkości v=200 km/h: 4 pkt;. uzasadnienia: 6 pkt.
Przyznajemy punkty np. za: 5min=1/12 godz.: 1 pkt; odległośc między pociągami równa 50 km: 2 pkt. Jeśli prawidłowa prędkość nie została odnaleziona, to można przyznać maksymalnie 4 pkt.
Cele: Obliczenie prędkości w ruchu jednostajnym.

Uwaga:
Sugerowana punktacja jest jedynie propozycją. Może być modyfikowana w zależności ciekawych i oryginalnych propozycji rozwiązań uczniów.

Zespół opracowujący zadania dla Matematyki Bez Granic