

# Matematyka Bez Granic



## Etap finałowy- Edycja 2011

- \* Rozwiązanie każdego zadania należy przedstawić na osobnym arkuszu odpowiedzi.
- \* W zadaniach 2, 4, 5 i 8 należy przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
- \* Wszystkie, nawet częściowe rozwiązania zadań, zostaną wzięte pod uwagę przez sprawdzających.
- \* Staranność wykonania będzie również punktowana.



### Zadanie 1 (7 punktów) Spotkanie u Khana

Zredaguj odpowiedź w języku francuskim, niemieckim, angielskim, hiszpańskim lub włoskim używając co najmniej 30 słów.

Marco und Polo müssen eine Strecke von 20 km zurücklegen um Khans Haus zu erreichen. Sie haben nur ein Paar Rollschuhe zur Verfügung. Sie möchten so schnell wie möglich bei ihrem Freund ankommen. Zu Fuß laufen Marco und Polo mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5 km/h. Mit den Rollschuhen fährt jeder mit einer konstanten Geschwindigkeit von 20 km/h. Zum Glück haben beide die gleiche Schuhgröße. **Wie müssen sie vorgehen, um so schnell wie möglich beide bei Khans Haus anzukommen? Wie lange brauchen sie dazu?**

Marco et Polo doivent parcourir 20 km pour se rendre chez Khan. Ils ont une seule paire de roller à leur disposition. Ils souhaitent arriver le plus rapidement possible chez leur ami. A pied, Marco et Polo se déplacent chacun à une vitesse constante de 5 km/h. En roller, chacun se déplace à vitesse constante de 20 km/h. Heureusement, les deux amis ont la même pointure de chaussures! **Comment devront-ils s'y prendre pour parvenir tous deux chez Khan le plus rapidement possible? Combien de temps cela leur prendra-t-il?**



Marco and Polo have to travel 20 km to reach Khan's house. They have just one pair of rollerblades that they can use. They want to reach their friend's house as quickly as they can. On foot, Marco and Polo both walk at a constant speed of 5 km/h. On rollerblades they both move at a constant speed of 20 km/h. Fortunately the two friends have the same shoe size!

**How should they plan so that they both reach Khan's house as quickly as possible? How long will that take them?**

Marco e Polo devono percorrere 20 km per raggiungere l'amico Khan. Hanno solo un paio di pattini a rotelle. Sperano di arrivare dal loro amico il più velocemente possibile. Marco e Polo, a piedi, camminano con una velocità costante di 5 km/h; mentre, con i pattini, si muovono con la velocità costante di 20 km/h. I due amici, fortunatamente, hanno lo stesso numero di scarpe!

**Come devono organizzarsi per raggiungere entrambi Khan al più presto? Quanto tempo impiegheranno?**

Marco y Polo deben recorrer 20 km para llegar a casa de Khan. Solo tienen un par de patines en línea a su disposición. Desean llegar lo más rápido posible a casa de su amigo. A pie, Marco y Polo se desplazan cada uno, a una velocidad constante de 5 km/h. Con patines, cada uno se desplaza a una velocidad constante de 20 km/h.

Afortunadamente los dos amigos tienen la misma talla de zapatos!

**¿Cómo tienen que organizarse para llegar los dos a casa de Khan lo más rápido posible?**

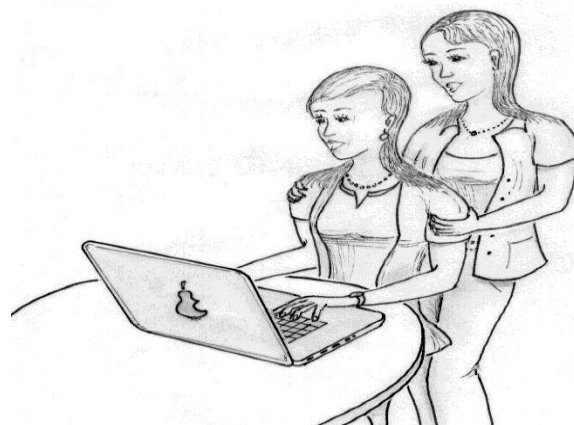
**¿Cuánto tiempo tardarán?**

### Zadanie 2 (5 punktów) Kto może więcej, ten może mniej

Znajdź największą i najmniejszą liczbę, jakie można otrzymać tylko przy pomocy dodawania i mnożenia, używając jeden raz każdej z sześciu liczb całkowitych 1, 4, 7, 5, 2, 1.

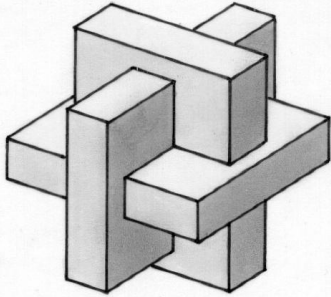
Podaj oba obliczenia.

(Dozwolone jest używanie nawiasów)



### Zadanie 3 (7 punktów) Układanka

Z trzech kawałków, z których każdy ma wymiary zewnętrzne  $2\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ , ułożono poniższą bryłę.



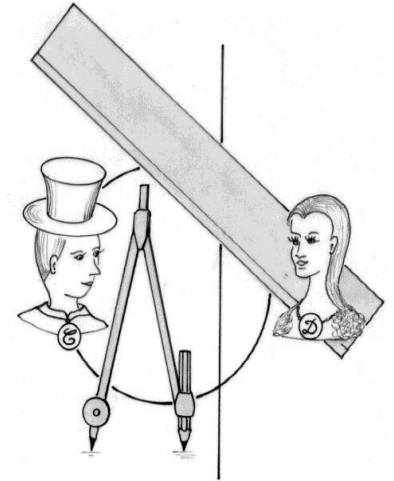
Oblicz jej objętość. Odpowiedź wyjaśnij.

### Zadanie 4 (5 punktów) Szczęśliwe wydarzenie

Pan Okrag i Pani Prosta będą mieli córkę...  $C$  jest okręgiem o środku  $O$  i promieniu równym  $4\text{ cm}$ ,  $A$  jest punktem okręgu, a  $d$  - symetralną promienia  $AO$ . Punkt  $P$  może się przemieszczać po prostej  $d$ .

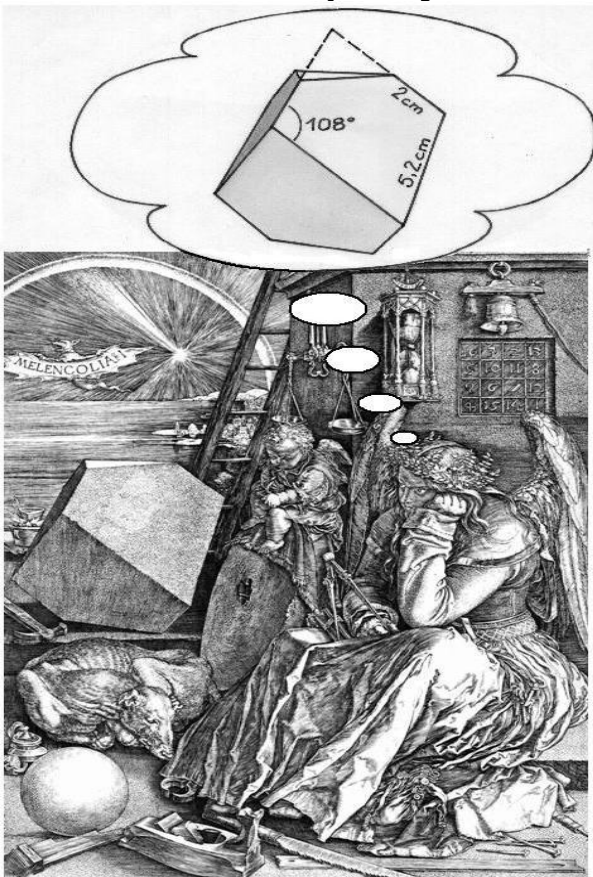
Dla każdego położenia punktu  $P$ , prosta  $AP$  przecina okrąg w punkcie  $Q$ . Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $QP$ . Szukana jest krzywa  $m$  wykreślona przez środek  $M$ , gdy punkt  $P$  przemieszcza się po prostej  $d$ .

Wyznacz tyle punktów  $P$ ,  $Q$  i  $M$ , by naszkicować krzywą  $m$ .



### Zadanie 5 (7 punktów) Wielościan Dürera

Rycina *Melancholia* (1514) Albrechta Dürera przedstawia liczne symbole i obiekty matematyczne. Zamyślony anioł patrzy na jedną ze ścian wielościanu. Spostrzega, że chodzi o romb, któremu obcięto jeden róg.

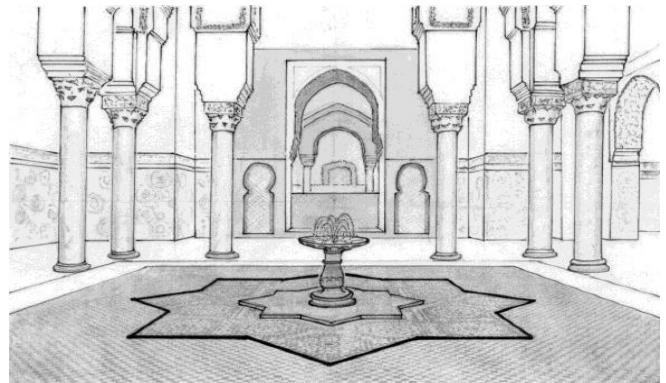


Na karcie odpowiedzi przedstaw tę ścianę bryły, jako romb o boku  $5,2\text{ cm}$  ścięty  $2\text{ cm}$  od wierzchołków kątów rozwartych o mierze  $108^\circ$ .

Uzupełnij figurę tak, aby otrzymać siatkę wielościanu, wiedząc, że zawiera dwa trójkąty równoboczne i że wszystkie pozostałe ściany są jednakowe.

### Zadanie 6 (5 punktów) Marokańska mozaika

Kiedy zwiedzałem wspaniały pałac w Maroku, przewodnik wyjaśnił mi, jak łatwo można otrzymać kształt takiej mozaiki.



- Bierzesz kwadratową kartkę papieru o środku  $O$ .
- Składasz ją na cztery części po przekątnych, potem jeszcze na dwie, aby otrzymać trójkąt prostokątny o przyprostokątnej  $OA$ .
- Na jego przeciwprostokątnej umieszczasz punkt  $B$  taki, że  $OA = OB$ .
- Wyznaczasz dwa odcinki, które przecinają się i sprawiają, że powstają dwa trójkąty prostokątne równoramienne o przeciwprostokątnych  $OA$  i  $OB$ .
- Odcinasz jeden z trapezów, które widzisz.
- Rozkładasz i już!

Na karcie odpowiedzi przyklej otrzymany kształt i wyjaśnij, dlaczego otrzymujemy kąty proste.

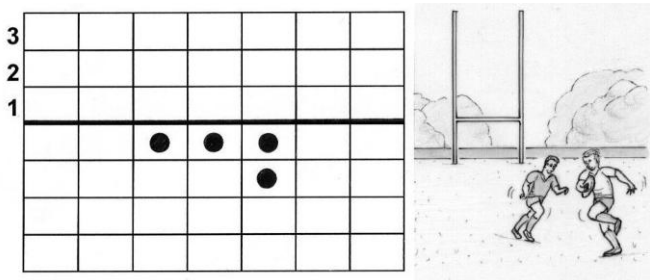
**Mathématiques**  
SANS  
Frontières



### Zadanie 7 (7 punktów) Próba trzeciego wiersza

Na papierze w kratkę wyznaczamy linię poziomą, którą pogrubiamy, aby była widoczna. Umieszczamy pionki na polach poniżej tej linii (po jednym pionku na pole). Dozwolony jest tylko następujący rodzaj poruszania się pionków: kiedy sąsiadem pionka, z lewej strony, z prawej strony lub u góry, jest inny pionek, za którym znajduje się wolne pole, może on przez niego przeskoczyć i zająć wolne pole. Zbity pionek zostaje zdjęty z planszy. Celem gry jest dojście najwyżej, jak to możliwe, ponad wybraną linię poziomą.

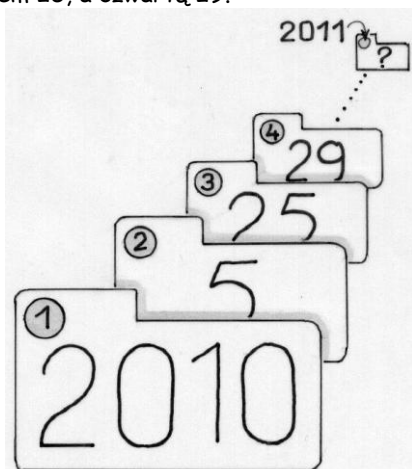
Wykaż, że przy ustawieniu przedstawionym poniżej można dotrzeć do drugiego wiersza.



Przedstaw ustawienie, pozwalające na dotarcie do trzeciego wiersza przy użyciu jak najmniejszej liczby pionków. Podaj kolejne ruchy.

### Zadanie 9 (7 punktów) Po 2010?

Tworzymy ciąg liczb. Pierwszą z nich jest 2010. Drugą jest suma kwadratów cyfr liczby 2010, czyli  $2^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2$ , co daje 5. Kontynuujemy w ten sam sposób. Trzecią liczbą będzie zatem 25, a czwartą 29.



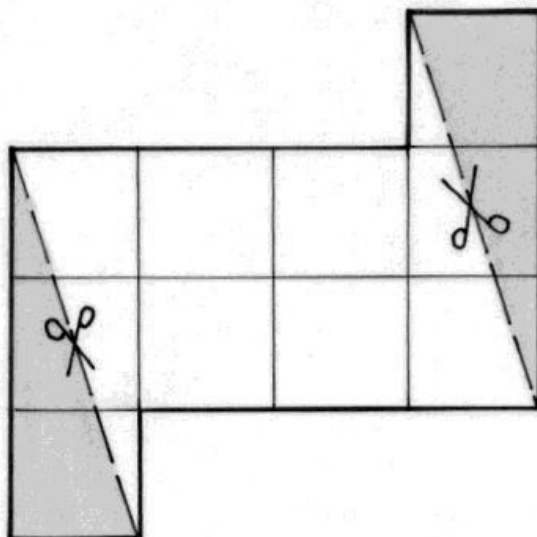
Jaka będzie dwa tysiące jedenasta liczba? Wyjaśnij.

**M**athématiques  
SANS  
Frontières

### Zadanie 8 (5 punktów) Cięcia kwadratów

Nathan połączył 10 kwadratów o boku 1 cm. Dwoma cięciami nożyczek przecina je na trzy części (patrz rysunek poniżej), następnie łączy tak, aby powstał kwadrat, który ma takie samo pole jak połączenie kwadratów.

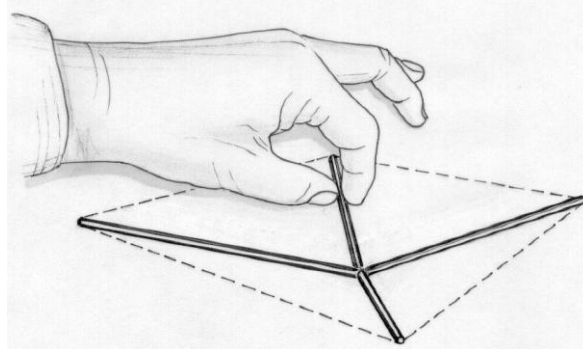
Na karcie odpowiedzi przyklej kwadrat otrzymany przez Nathana.



Następnie przedstaw połączenie 29 kwadratów o boku 1 cm, podziel je dwoma cięciami w taki sposób, byś z otrzymanych trzech części mógł zestawić kwadrat.

### Zadanie 10 (10 punktów) Na cztery makarony

Na stole ułożono w kształcie gwiazdy cztery kawałki surowego makaronu spaghetti o długości 3 cm, 5 cm, 11 cm i 13 cm. Końce makaronu stykają się w środku gwiazdy. Cztery pozostałe końce są wierzchołkami czworoboku.



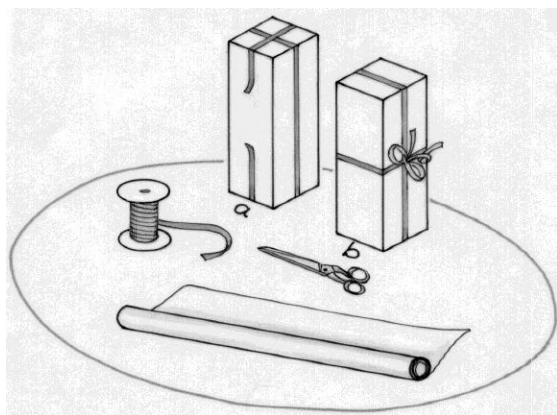
W jaki sposób należy ułożyć makaron, zachowując podany układ gwiazdy, aby otrzymać możliwie największe pole czworoboku? Uzasadnij.

## Zadania dodatkowe dla 1 klasy szkoły ponadgimnazjalnej

### Zadanie 11 (5 punktów) Dobrze przewiązane

Moje pudełko na prezent jest prostopadłościanem o podstawie kwadratu. Chciałbym je udekorować ładną tasiemką o długości 1,50 m. Gdy przewiążuję pudełko według wzoru (a), brakuje mi 10 cm, aby połączyć końce tasiemki. Na szczęście, gdy wzoruję się na (b), pozostaje mi 30 cm na piękną kokardę.

Jaką objętość ma moje pudełko? Wyjaśnij.



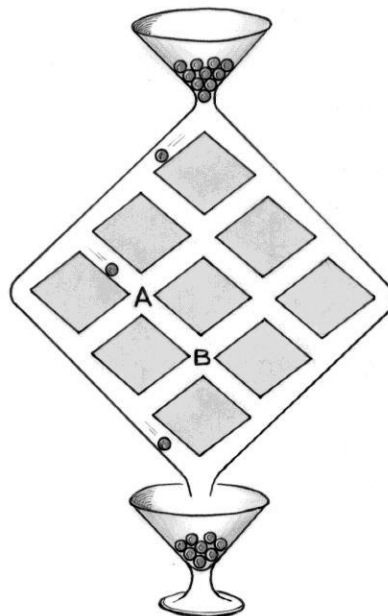
### Zadanie 12 (7 punktów) Tocz kulkę

W przedstawionej poniżej grze, kulka opuszczając zbiorniczek może jedynie toczyć się w dół. Kiedy dociera do skrzyżowania, prawdopodobieństwo, że potoczy się w jedną lub w drugą stronę jest jednakowe.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że kulka opuszczając zbiorniczek przejdzie przez skrzyżowanie A?

A jakie jest prawdopodobieństwo, że przejdzie przez B?

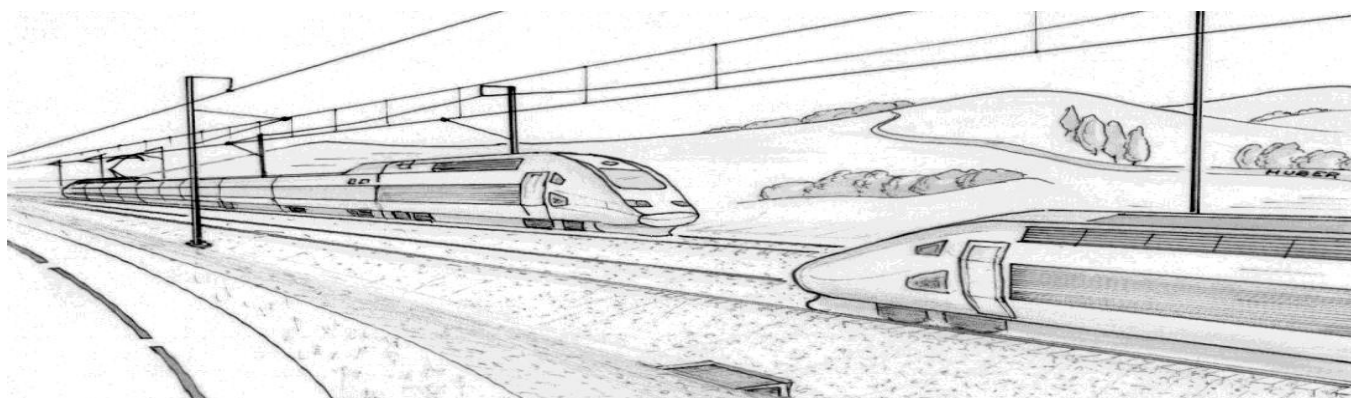
Uzasadnij odpowiedź.



### Zadanie 13 (10 punktów) Szybkobieżny pociąg Alberta

Albert podróżuje pociągiem szybkobieżnym TGV. Zauważa, że co 5 minut jego pociąg mija inny pociąg TGV. Wszystkie pociągi jadą ze stałą prędkością 300 km/godz. Nagle pociąg Alberta zwalnia, a potem znowu jedzie ze stałą prędkością. Zwolnienie nie dotyczy pociągów jadących w przeciwnym kierunku. Wtedy Albert stwierdza, że jego pociąg mija inne pociągi TGV dokładnie co 6 minut.

Jaka jest prędkość pociągu Alberta po zwolnieniu? Uzasadnij.



Mathématiques  
SANS  
Frontières