ZIMOWA SZKOŁA MATEMATYKI 2024 TEST WIADOMOŚCI

imię i nazwisko ………………………………………………………………………….. **szkoła** ……………………………………………………….……

Zad. 1. Dane są punkty *A*(2, 5), B(-1, -3), C(0, 4), D(-2, 3). Podaj:

a) współrzędne sumy wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ ……………………………………………………………………

b) współrzędne różnicy wektorów $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OB}$ ……………………………………………………………………

c) współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ …………………………………………………………………..

d) iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{BA}$ ……………………………………………………………………

e) iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{AC}$ ……………………………………………………………………

f) iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ ……………………………………………………………………

g) współrzędne wektora wodzącego środka odcinka *OC* ……………………………………………………………………

h) współrzędne wektora wodzącego środka odcinka *AB* ……………………………………………………………………

i) współrzędne wektora wodzącego środka ciężkości trójkąta *ABC* …………………………………………………………..

j) pole trójkąta *ABC* ……………………………………………………………………

k) pole czworokąta *ABCD* ……………………………………………………………………

l) równanie prostej przechodzącej przez punkt *A* ……………………………………………………………………
i równoległej do wektora $\overrightarrow{CD}$

Zad. 2. Jaką długość ma wektor [1, 1, 2,]? ……………………………………………………………………

Zad. 3. Jaka jest odległość punktu (-1, 2, -3) od płaszczyzny a) …………………………… b) ……………………………………
a) $x = 3$, b) $2x+y+2z = 1$?

Zad. 4. Podaj niezerowy wektor prostopadły do płaszczyzny rozpiętej …………………………………………………………..
przez wektory $\boldsymbol{v} = [1, 2, -1]$ oraz $\boldsymbol{u} = [-3, 1, 2]$.

Zad. 5. Znajdź pole równoległoboku rozpiętego …………………………………………………………..
przez wektory $\boldsymbol{u} = [3, -2, 1]$ oraz $\boldsymbol{v} = [4, 6, -2]$.

Zad. 6. Znajdź pole równoległościanu rozpiętego …………………………………………………………..
przez wektory $\boldsymbol{u} = [3, -2, 1]$, $\boldsymbol{v} = [4, 6, -2]$ i $\boldsymbol{w} =[1, 2, -3]$.

Zad. 7. Jaki kąt tworzą na płaszczyźnie proste: ………………………………………………………….
$x-\sqrt{2}y = 1$ oraz $x+\sqrt{2}y = -3$?

Zad. 8. Jaki kąt tworzą w przestrzeni płaszczyzny: …………………………………………………………..
$x-\sqrt{2}y+z = 1$ oraz $x+\sqrt{2}y-z = -3$?

Zad. 9. Zapisz macierze podanych przekształceń płaszczyzny:
a) symetrii względem prostej $y=-x$ b) jednokładności o środku (0, 0) i skali 2 c) Obrotu o 180° względem (0, 0)

……………………………………………… ………………………………………… ………………………………………………

Zad. 10. Uzasadnij, że wektory [2, 3] i [-3, 2] są prostopadłe za pomocą

a) elementarnej geometrii szkolnej

b) rachunku wektorów

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………..

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………..

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………..

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………..

Zad. 11. Uzasadnij, że dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ zachodzi równość $2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$.

………

………

………

………

Zad. 12. Skrzyżowanie tworzą dwie prostoliniowe drogi przecinające się pod kątem 60°. W tym samym momencie z tego skrzyżowania wyruszyli dwaj motocykliści. Pierwszy poruszał się z szybkością v_1 = 80 km/h na wschód, a drugi jechał z szybkością v_2 = 40 km/h w kierunku północno-wschodnim. Z jaką szybkością oddalali się od siebie nawzajem?

………

………

………

………

Zad. 13. Trójkąt *ABC* jest rozpięty przez dane wektory $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC}$ oraz $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BA}$. Wyznacz dowolny niezerowy wektor równoległy do dwusiecznej kąta *B* w tym trójkącie.

………

………

………

………

Zad. 14. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb *a*, *b* i *c* o sumie 4 zachodzi nierówność $\sqrt{a} + 4\sqrt{b} + 2\sqrt{2c} \leq 10$.

………

………

………

………

ZIMOWA SZKOŁA MATEMATYKI 2024   TEST WIADOMOŚCI

KLUCZ

1. a) [2, 9]   b) [1, 7]   c) [-3, -8] i [-2, -1]   d) -14   e) [0, 0, -5]   f) 0   g) [0, 2]   h) [1/2, -1]   i) [1/3, 2]
   j) 13/2   k) 13   l) np. [-2*k*+2, -*k*+5]

2. $\sqrt{6}$ 3. a) 4, b) 7/3   4. np. [5, 1, 7]   5. 2   6. 20   7. arccos(1/3)

8. arccos(-1/2) = 120°   9. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

10. a) Trójkąty przystające prostokątne rozpięte na danych wektorach mają odpowiednie katy przystające, w wierzchołku spotyka się para katów dopełniających się do 90°, a pozostały kąt uzupełnia tamte do półpełnego, więc też ma 90°.
b) 2·(-3)+3·2 = 0 = |***a***||***b***|·cos(***a***, ***b***), czyli kosinus się zeruje, a tak jest dla 90°.

11. Wymnożyć prawą stronę, korzystając z rozdzielności iloczynu wektorowego względem dodawania i odejmowania wektorów, potem skorzystać z ***a*** × ***a*** = **0**.

12. Szukana szybkość (wektorowo!) jest długością różnicy $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$. Wartości obu prędkości i kąta są tak dobrane, że łatwo zauważyć połowę trójkąta równobocznego, który daje odpowiedź $\sqrt{3}/2|\boldsymbol{v}_1| = 40\sqrt{3} \approx 70$ km/h.

13. Trzeba otrzymać przekątną rombu, np. ***d*** = ***a***|***c***| + ***c***|***a***|.

14. Niech ***u*** = [√a, √b, √c] i ***v*** = [1, 4, 2√2]. Wtedy $L = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} \le |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| = \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{25} = \sqrt{10}$.