Twierdzenia graniczne

Daniel Łyjak
Damian Dudek

Wartość oczekiwana

EX – średnia z rozkładu zmiennej losowej X,

dla rozkładów dyskretnych dodatnich:

$$EX = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x \cdot P_X(X = k)$$

Dla rozkładów ciągłych:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)$$

Podstawowe własności:

$E(X + a) = EX + a$ $\qquad$ $E(a) = a$

$E(aX) = aEX$

Odchylenie standardowe

Niech X oznacza zmienną losową o średniej μ i odchyleniu standardowym σ

Oznaczmy przez:

$\sigma(X) = \sqrt{E(X - EX)^2}$ - odchylenie standardowe z X

Podstawowe własności:

$\sigma(aX) = a \cdot \sigma(X)$

$\sigma(X + a) = \sigma(X)$

$\sigma(a) = 0$

Standaryzowanie zmiennej losowej

Niech X oznacza zmienną losową o średniej μ i odchyleniu standardowym σ

Rozpatrzmy zmienną losową $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Wtedy Z oznacza zmienną losową o średniej 0 i odchyleniu standardowym 1

$$EZ = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}(EX-\mu) = 0$$

$$\sigma(Z) = \frac{1}{\sigma}\big(\sigma(X-\mu)\big) = \frac{1}{\sigma}\big(\sigma(X)\big) = 1$$

Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

$X \sim Bin(n, p)$, czyli rozpatrujemy zmienną losową o rozkładzie dwumianowym.

Własności:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$EX = np$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Rozkład sumy

X interpretujemy jako liczbę sukcesów w n próbach, gdzie prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p.

Jeżeli oznaczymy przez Y_i taką zmienną losową, że:

$$P(Y_i = 1) = p, \qquad P(Y_i = 0) = (1 - p)$$

tzn. czy nastąpił sukces w i-tej próbie?

Możemy wtedy zapisać:

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n$$

Zmienna X to łączna liczba sukcesów.

Rozkład sumy

Wprowadźmy zmienną losową $Z = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$, gdzie $EY_i = \mu$ a $\sigma(Y_i) = \sigma$.

Możemy obliczyć:

$EZ = \mu$ oraz $\sigma(Z) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

Jeżeli $n \to \infty$, to $\sigma(Z) \to 0$.

Otrzymujemy:

$$\frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \to EY$$

Centralne Twierdzenie Graniczne

Rozpatrzmy $Y_1 + \cdots + Y_n$, zmienne losowe o tym samym rozkładzie.

Wtedy możemy aproksymować $Y_1 + \cdots + Y_n$ przez Z , gdzie $N(nEY, \sqrt{nVarY}$)

W szczególności możemy zmienną $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ unormować i wtedy otrzymujemy:

$$\frac{X - EX}{\sqrt{VarX}} \sim N(0,1)$$

Wyznaczanie prawdopodobieństw

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-nEX}{\sqrt{nVarX}} \leq a\right) = \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{a})$$

Gdzie $\boldsymbol{\Phi}$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

W szczególności dla rozkładu Bernoulliego mamy:

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq a\right) = \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{a})$$