Algebra wektorów

Co mówi matematyk, kiedy widzi nisko przelatujące wektory?
Pewnie gdzieś tu mają bazę.

folklor

Zad. 1. Czy punkty *A*, *B* i *C* są współliniowe, jeśli ***OA*** = 10***a***, ***OB*** = 5***b***, ***OC*** = 4***a***+3***b***?

Zad. 2. Dane są punkty *A, B, C, D* takie, że: **AB** = ***DC*** i ***BC***+***DA*** = **0**. Jaką figurę tworzą punkty *A, B, C, D*?

Zad. 3. a) Podaj równanie prostej przechodzącej przez punkt (4, -1) i równoległej do wektora $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

b) Podaj równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt (4, -1, 1) i równoległej do wektora $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Zad. 4. Jaki jest kąt między wektorami $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$? A jaki między $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\6\\-8\end{pmatrix}$?

Zad. 5. Pozycja okrętu *Argonautus* opisana jest równaniem wektorowym: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\28\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$, gdzie *t* jest czasem w godzinach liczonym od południa. Gdzie znajduje się okręt o 13.00? Z jaką prędkością i szybkością się porusza? Jakie jest kartezjańskie równanie jego toru ruchu? Barka *Bodicea* stoi zacumowana w punkcie, którego wektor pozycyjny to [18,4]. Czy statki zderzą się, jeśli *Argonautus* nie zmieni kursu? Jeśli tak, to o której? Na wypadek, gdyby miały się jednak zderzyć, *Bodicea* ruszyła o 13.00 z prędkością (w km/h) opisaną wektorem [5, 12]. Opisz pozycję barki po czasie *t*. Jak daleko znajdą się statki o 15.00?

Zad. 6. Dwie brygady kładą kabel na pustyni w kierunku N-S. O 6.00 wyruszają z obozowiska w punkcie (0,0). Pierwsza jedzie jaguarem z prędkością [18, 24] km/h, a druga -gepardem z prędkością [36, -16] km/h. Z jaką szybkością porusza się każdy samochód? Gdzie znajdują się samochody o godz. 6.30? W jakiej są wtedy odległości ? O 6:30 brygada z geparda przerywa podróż i zaczyna kłaść kabel na północ. Załoga jaguara jedzie dalej ze swoją prędkością aż znajdzie się dokładnie na północ od poprzedniej. O której godzinie II ekipa zaczyna pracę? Każda ekipa kładzie średnio 800 m kabla na godzinę. Jaka odległość dzieli brygady w porze lunchu o 11.30?

Zad. 7. Niech $\vec{a}$ = [1, 2, 3], $\vec{b}$ = [-3, 4, 2]. Co oznaczają napisy:
a) $-0{,}25\,\vec{a} + 1{,}25\,\vec{b}$, **b)** $(1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ **c)** $t\,\vec{a} + (1-t)\,\vec{b}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ **d)** $(1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$, $t \in (-\infty, +\infty)$
e) $(1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$, $t \in \langle 2, 3\rangle$ **f)** $\vec{a} + 3 \cdot [\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ **g)** $(1-t^2)\,\vec{a} + t^2\,\vec{b}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
h) $\vec{a} + (-2) \cdot [1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)]$, $t \in \langle 0, 2\rangle$ **i)** $\vec{a} + 10\,[\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0] + 0{,}1\,[\cos(8\pi t), 0, \sin(8\pi t)]$, $t \in \langle 0, 6\rangle$
j) $\sin^2(2\pi t)\,\vec{a} + \cos^2(2\pi t)\,\vec{b}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ **j*)** $\sin(2\pi t)\,\vec{a} + \cos(2\pi t)\,\vec{b}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ **k)** $2\,\vec{a} + t\,\vec{b}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
Dla ułatwienia zrób najpierw wersje 2-wymiarowe tych zadań, wstaw kilka konkretnych wartości *t*, rób rysunki.

Przekształcenia liniowe

Matematycy są jak Francuzi: cokolwiek im się powie,
od razu przekładają to na swój własny język
i wówczas staje się to zupełnie czymś innym.
J. W. Goethe

Zad. 1. Punkt *A* ma współrzędne (6, -2), a punkt *B* - (2, 6). *B* jest obrazem *A* w pewnej symetrii osiowej. Względem jakiej prostej?

Zad. 2. Co to za przekształcenia?
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$

Zad. 3. Zapisz macierze podanych przekształceń.
a) symetria względem osi *OY*,
b) obrót względem punktu (0, 0) o 90°,
c) powinowactwo prostokątne względem osi *OX* o skali 2,
d) symetria względem prostej *y*=2*x*,
e) jednokładność o środku (0, 0) i skali 3,
f) pochylenie osi *OY* układu współrzędnych tak, aby tworzyła kąt 60° z osią *OX*,
g) złożenia powyższych przekształceń.

Zad. 4. Przekształcenie liniowe o macierzy *P* przekształca punkt (1, 0) na (0, -1/2) i punkt (0, 1) na (2, 2). Znajdź macierz tego przekształcenia. Pokaż, że punkt (6, 3) jest jego punktem stałym. Czy jest to jedyny taki punkt? Co to za przekształcenie?

Zad. 5. Przekształcenie *T* zadane jest wzorem: $T\colon \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}6 & -0{,}8\\ 0{,}8. & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Opisz je dokładnie. Pokaż, że (2, -1) jest niezmienniczym punktem tego przekształcenia.

Zad. 6. Czworokąt *OABC* przeszedł w powyższym przekształceniu na *O'A'B'C'*, gdzie *O'*=(0, 0), *A'*=(4, 3.5), *B'*=(6, 6.4), *C'*=(2, 3). Znajdź współrzędne punktów *O, A, B, C*. Co to za wielokąt? Jak zmienia się jego pole po przekształceniu?

Zad. 7. Dane są przekształcenia liniowe: *R* obrót o 45° wokół punktu (0, 0), *S* jednokładność o skali $\sqrt{2}$ i środku w (0, 0). Zapisz macierze tych przekształceń. Co jest obrazem prostej *y*=2*x* po złożeniu tych przekształceń? Czy zależy to od kolejności złożenia?

Zad. 8. Znajdź macierz *Q* taką, że dla wszystkich wektorów [*x*, *y*] będzie zachodzić: $Q\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}$.

Zad. 9. Dane są przekształcenia płaszczyzny $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ i $N=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Znajdź macierz opisująca ich złożenie. Co się dzieje z polem przekształconego przezeń kwadratu?

Zad. 10. Co jest obrazem prostej *y*=2*x*+1 w przekształceniu liniowym $T=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$?