ZAGADNIENIE 8
Zastosowanie rachunku wektorów do dowodzenia własności geometrycznych

Materiał teoretyczny obejmuje:
– Podstawowe wiadomości z algebry wektorów.
– Liniowa zależność i niezależność wektorów.
– Podprzestrzeń liniowa, baza i wymiar podprzestrzeni.
– Iloczyn skalarny wektorów, jego własności i zastosowania.
– Iloczyn wektorowy, jego ilustracja fizyczna i geometryczna.
– Zastosowanie wektorów do definiowania wielu ważnych pojęć matematycznych.

Zadania

1. Udowodnić w oparciu o rachunek wektorów twierdzenie cosinusów.

2. Udowodnić w oparciu o rachunek wektorowy, że przekątne rombu są prostopadłe.

3. Udowodnić, że jeżeli przekątne czworokąta dzielą się na połowy, to czworokąt jest równoległobokiem.

4. Udowodnić, że suma kwadratów długosci środkowych boków trójkąta jest równa $\frac{3}{4}$ sumy kwadratów długości jego boków.

5. Dowieść, że dla każdego $n \in N$ $\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{6\pi}{n}+.....+\sin\frac{2\pi n}{n}=0$.

6. Dowieść, że dla każdego $n \in N$ $(n > 1)$, spełniona jest równość:
$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+........+\cos\frac{2\pi n}{n}=0$.

7. Dowieść, że jeżeli A, B, C, D są wierzchołkami czworościanu, a S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to $|SD| < \frac{|AD|+|BD|+|CD|}{3}$.

8. Jeżeli punkt S jest środkiem ciężkości układu punktów A_1, A_2, ..., A_n w przestrzeni (przyjmujemy, że punkty mają masy równe), a M jest dowolnym punktem przestrzeni, to:
$|MA_1|^2+|MA_2|^2+...........+|MA_n|^2=n|MS|^2+|SA_1|^2+|SA_2|^2+.......+|SA_n|^2$.
Dowód przeprowadzić dla $n = 3$.

9. Dowieść, że $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

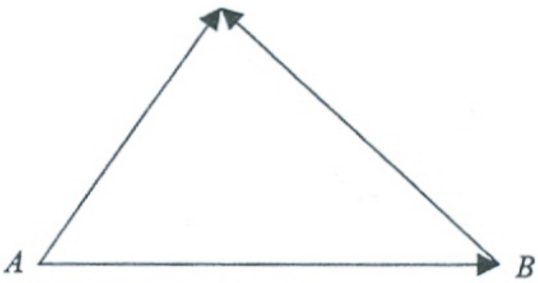
Wskazówki do rozwiązań

1. Przyjmijmy, że: $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$.

Mamy: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

Stąd: $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) =$

$= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C$.



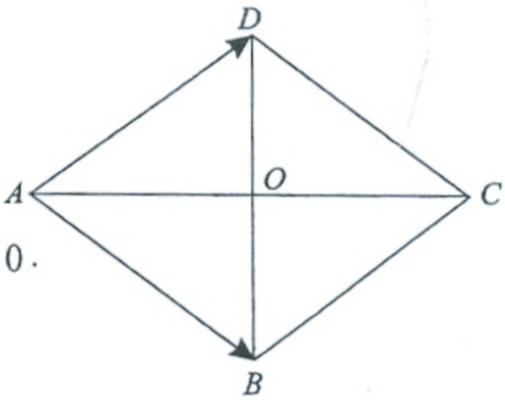
Rys. 26

2. Wprowadźmy oznaczenia: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}$.

Wtedy: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Czyli: $\vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$.

Stąd $\vec{d} \perp \vec{c}$.

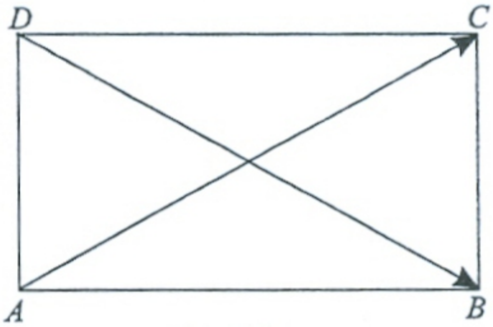


Rys. 27

3. Przyjmijmy, że $\overrightarrow{AC} = \vec{p}$ i $\overrightarrow{DB} = \vec{q}$.

Wtedy: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$, $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$.

Zatem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, czyli proste AB i CD są równoległe i $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$.



Rys. 28

4. Oznaczamy $|\overrightarrow{BC}| = a$, $|\overrightarrow{AC}| = b$, $|\overrightarrow{AB}| = c$ i $|\overrightarrow{CD}| = p$, $|\overrightarrow{AE}| = q$, $|\overrightarrow{BF}| = r$.

Mamy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$,

więc $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = \vec{0}$.

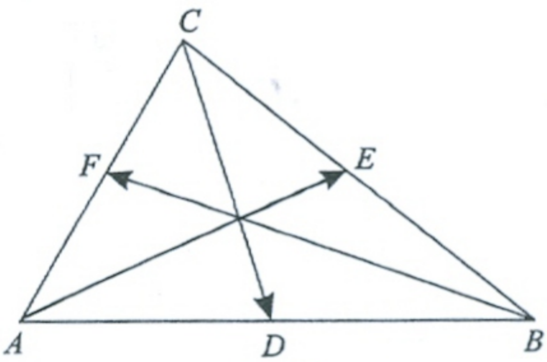
Stąd: $a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} = 0$ (1)

Uwzględniając równości:

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

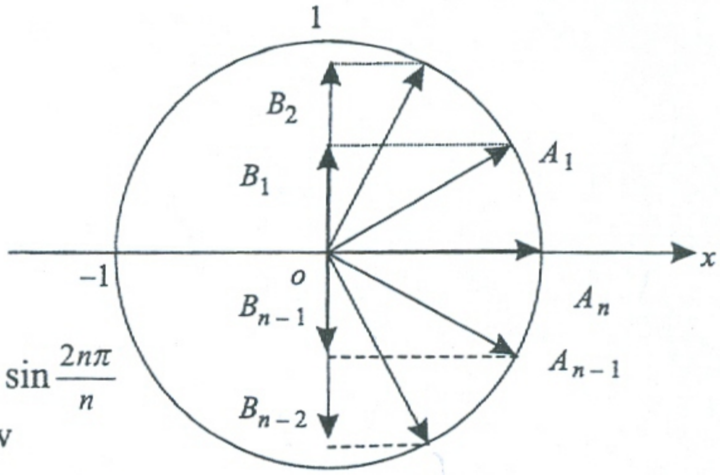


Rys. 29

uzyskamy: $\overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{AE}^2 + \overrightarrow{BF}^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (2)

Ponieważ z (1) wynika, że: $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$, więc (2) przyjmuje ostatecznie postać: $p^2 + q^2 + r^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

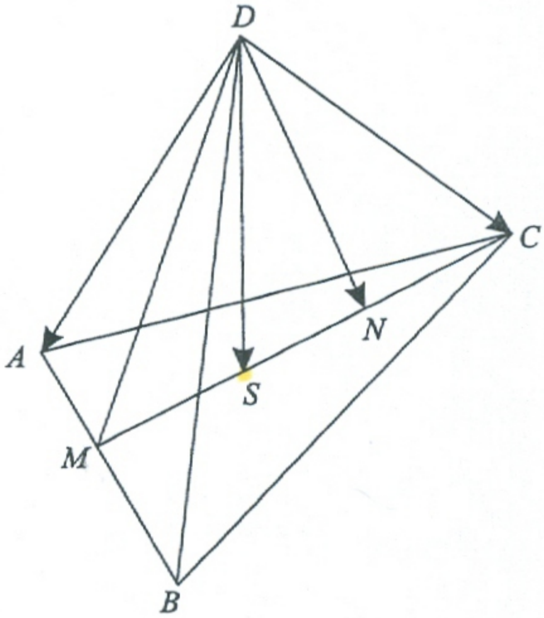
5. Weźmy pod uwagę wektory:
$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{OA_{n-1}}, \overrightarrow{OA_n}$
o długości 1, tworzące z dodatnią osią OX odpowiednie kąty o miarach:
$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{2n-2}{n}\pi, \frac{2n\pi}{n}$.
Suma:
$S = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots\ldots + \sin\frac{2n-2}{n}\pi + \sin\frac{2n\pi}{n}$
jest równa sumie miar rzutów wektorów
$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{OA_{n-1}}, \overrightarrow{OA_n}$ na oś OY czyli wektorów $\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}, \ldots\ldots \overrightarrow{OB_{n-1}}, \overrightarrow{OB_n}$. Te wektory są parami wektorów przeciwnych: $\overrightarrow{OB_{n-1}} = -\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_{n-2}} = -\overrightarrow{OB_2}$, ..., z wyjątkiem rzutu wektora $\overrightarrow{OA_{\frac{n}{2}}}$, gdy n jest parzyste. Ale miary tych ostatnich wektorów są równe zero, czyli w każdym przypadku $S = 0$.



Rys. 30

6. Dowód tożsamości przeprowadza się w oparciu o rozumowanie analogiczne do zastosowanego w zadaniu poprzednim.

7. Niech N będzie środkiem odcinka $\overline{SC}$,
zaś M środkiem odcinka $\overline{AB}$.
Wtedy mamy: $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN})$,
$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$,
$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{DC})$.
Stąd $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, czyli
$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.
Ponieważ długość sumy wektorów nie leżących na jednej linii prostej jest mniejsza od sumy długości tych wektorów, więc: $|DS| < \frac{|DA| + |DB| + |DC|}{3}$.



Rys. 31

8. Niech S będzie środkiem ciężkości trójkąta A_1, A_2, A_3, a M dowolnym punktem przestrzeni. Zachodzą równości:
$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA_1}$
$\overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA_2}$
$\overrightarrow{MA_3} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA_3}$.

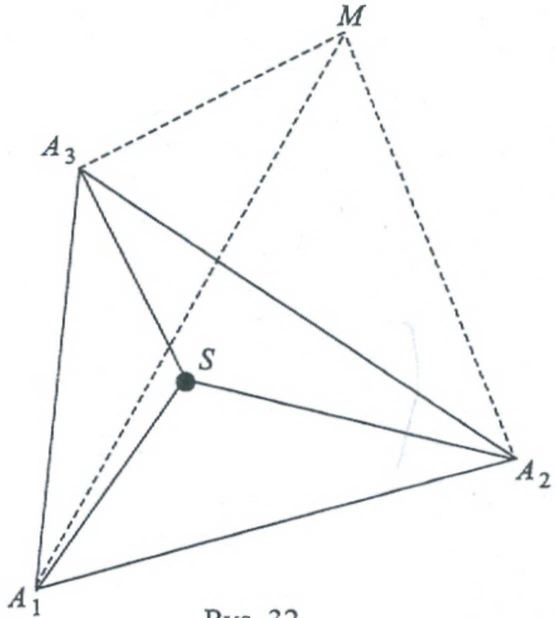
Obliczamy wyrażenie:

$$\overrightarrow{MA_1}^2 + \overrightarrow{MA_2}^2 + \overrightarrow{MA_3}^2 =$$
$$= 3\overrightarrow{MS}^2 + 2\overrightarrow{MS}(\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{SA_3}) +$$
$$+ \overrightarrow{SA_1}^2 + \overrightarrow{SA_2}^2 + \overrightarrow{SA_3}^2 .$$

Ponieważ $\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{SA_3} = 0$. (dlaczego?);

więc $|\overrightarrow{MA_1}|^2 + |\overrightarrow{MA_2}|^2 + |\overrightarrow{MA_3}|^2 =$

$= 3\overrightarrow{MS}^2 + |\overrightarrow{SA_1}|^2 + |\overrightarrow{SA_2}|^2 + |\overrightarrow{SA_3}|^2$.

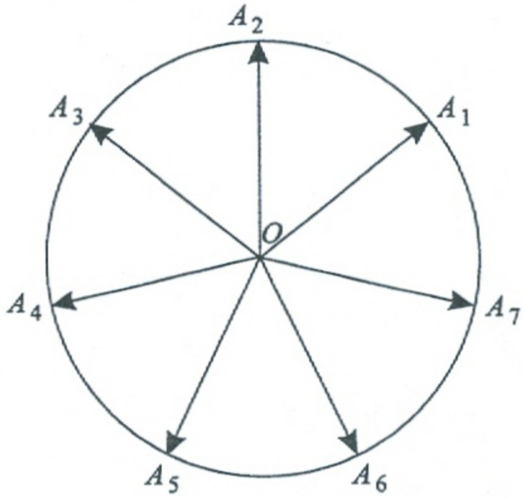


Rys. 32

9. Niech będzie dany okrąg o środku O i o promieniu jednostkowym. Załóżmy, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 leżące na tym okręgu dzielą go na 7 równych części.

Zachodzi równość: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{OA_7} = \overrightarrow{O}$.

Równość ta zachodzi dlatego, że gdybyśmy układ tych wektorów obrócili wokół o kąt mający miarę $\frac{2\pi}{7}$ (lub jego wielokrotność), to powyższa suma wektorów nie ulega zmianie, co jest możliwe jedynie, gdy jest on wektorem zerowym. Rzutujemy wszystkie wektory tej sumy np. na prostą wyznaczaną przez $\overrightarrow{OA_7}$. Otrzymana suma miar tych rzutów będzie równa zero. Z drugiej strony jest ona równa sumie iloczynów długości tych wektorów przez cosinusy kątów, jakie tworzą z prostą OA_7.



Rys. 33

W związku z tym: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \ldots.. + \cos\frac{12\pi}{7} + 1 = 0$ (1)

Ponieważ $\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\frac{12\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7} = \cos\frac{10\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7}$

oraz $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$ i $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$, więc $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Na realizację tego zagadnienia należy przeznaczyć 6–8 godzin.

Literatura

1. E. Piegat – *Wektory i geometria.*
2. S. J. Nowosiełow – *Specjalny wykład trygonometrii.*
3. *Zadania z olimpiad matematycznych.*