0. Oblicz długość wektora $[x_v, y_v]$. (Oznaczamy ją $|[x_v, y_v]|$).

1. Udowodnij, że dla dowolnych $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ zachodzi:

a) $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

b) $\sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+(y_1+y_2+\cdots+y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\cdots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}$

2. Czy dla każdego wektora $\vec{v}$ i dowolnej liczby a prawdą jest, że $|a\vec{v}| = a|\vec{v}|$?

3. Punkty A, B, C, D leżą na płaszczyźnie. Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AB i CD. Udowodnić, że $2|MN| \leqslant |BC| + |DA|$.

4. Rozpatrzmy czworościan *ABCD*. Niech *A'*, *B'* i *C'* oznaczają końce środkowych trójkąta *ABC* poprowadzonych odpowiednio z *A*, *B* i *C*, a *M* będzie jego środkiem ciężkości.

a) Udowodnij, że $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

b) Zapisz $\overrightarrow{DM}$ za pomocą $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$.

5. Czworokąty $APQB$, $BRSC$ i $CTUA$ są równoległobokami. Wykazać, że z odcinków QR, ST, UP można zbudować trójkąt (być może zdegenerowany).
6. Pięć różnych punktów A, B, C, D, E leży na płaszczyźnie. Punkty K, L, M, N są środkami odcinków odpowiednio AB, BC, CD, DE. Punkty P, Q są środkami odcinków odpowiednio KM, LN. Udowodnić, że $PQ \parallel AE$.
7. Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym $2|AG| = |GB|$, $2|BE| = |EC|$ oraz $2|CF| = |FA|$. Punkty P i Q leżą na odcinkach odpowiednio EG i FG, przy czym $2|EP| = |PG|$ oraz $2|GQ| = |QF|$. Dowieść, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.

Część II. 0. Uzasadnij, że dla wszystkich wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ oraz dowolnych liczb *a* i *b*:

a) $\vec{u}\circ\vec{v} = \vec{v}\circ\vec{u}$ b) $(a\vec{u})\circ(b\vec{v}) = ab(\vec{u}\circ\vec{v})$ c) $\vec{u}\circ(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\circ\vec{v})+(\vec{u}\circ\vec{w})$ d) $\vec{u}\circ\vec{u} = |\vec{u}|$

0'. Trygonometria uczy nas, że dla kosinus różnicy dowolnych dwóch kątów jest sumą iloczynu ich sinusów i iloczynu ich kosinusów. Wykaż, że iloczyn skalarny wektorów $[x_1, y_1]$ i $[x_2, y_2]$ to $x_1x_2 + y_1 y_2$.

1. Na płaszczyźnie leżą cztery różne punkty A, B, C, D. Wykazać, że jeśli $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$, to również $BC \perp AD$.
2. Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami (kolejność wierzchołków podano przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Punkt M jest środkiem odcinka BR. Dowieść, że $AM \perp DP$.
3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt D jest środkiem odcinka AB, a punkt E jest środkiem ciężkości trójkąta ACD. Udowodnić, że $CD \perp OE$.
4. Boki trójkąta ABC są podstawami trójkątów równoramiennych BCD, CAE, ABF, zbudowanych na zewnątrz niego. Przez punkty A, B, C przeprowadzono proste prostopadłe odpowiednio do odcinków EF, FD, DE. Udowodnić, że te proste przecinają się w jednym punkcie.
5. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie cztery niezerowe wektory na płaszczyźnie, że suma każdych dwóch spośród nich jest prostopadła do sumy dwóch pozostałych.
6. W czworościanie $ABCD$ zachodzi równość $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ$. Dwusieczna kąta CAD przecina odcinek CD w punkcie K. Wykazać, że kąt BAK jest prosty.