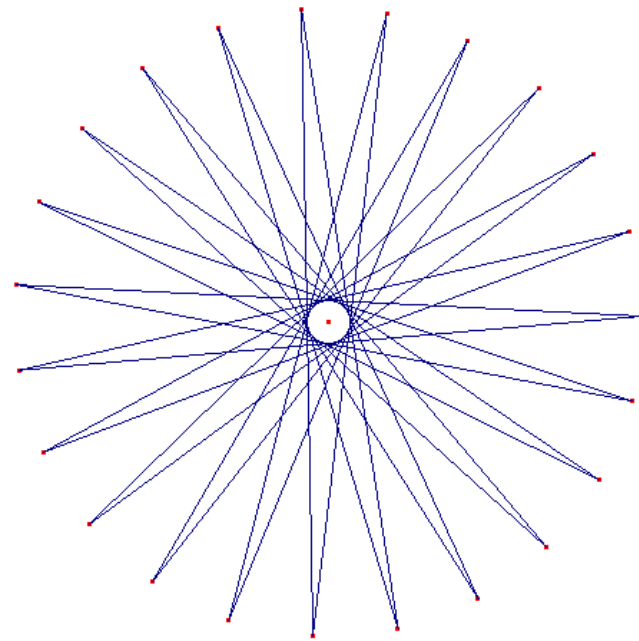


WIELOKĄTY GWIAŹDZISTE

Paulina Bancerz



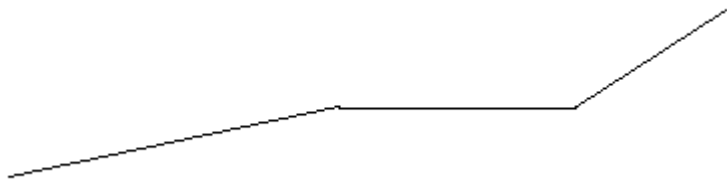
Łamana

Łamana to figura geometryczna utworzona ze skończonej liczby odcinków takich, że:

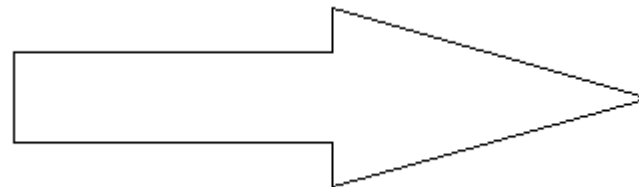
- żadne dwa następujące po sobie odcinki nie leżą na jednej prostej,
- koniec każdego odcinka (oprócz ostatniego) jest początkiem następnego odcinka.

- Odcinki, z których składa się łamana, to jej boki. Końce boków łamanej są jej wierzchołkami.
- Jeżeli koniec ostatniego boku łamanej pokrywa się z początkiem pierwszego, to łamaną nazywamy **zamkniętą**.
- Jeżeli niekolejne boki łamanej nie mają punktów wspólnych, to łamaną nazywamy **zwyčajną**.

łamana zwyczajna
otwarta



łamana zwyczajna
zamknięta

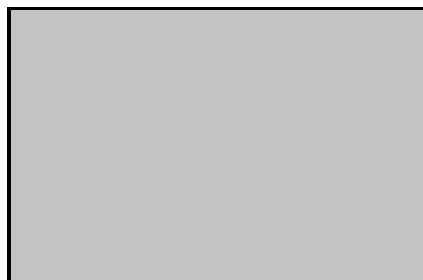
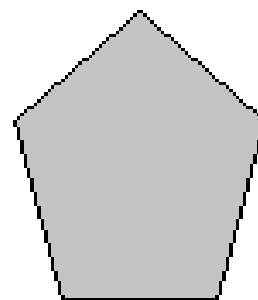
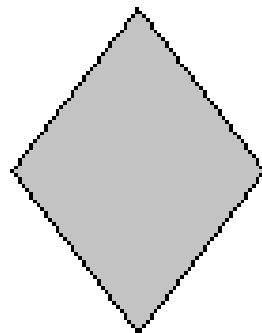
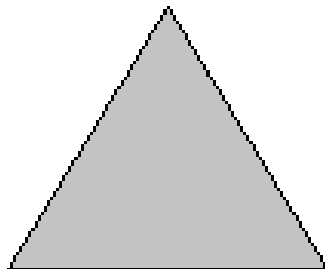


Wielokąt

Wielokąt (wielobok, n -kąt, n -bok) to płaska figura geometryczna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą o n bokach (n jest większe niż 2) wraz z tą łamaną, która stanowi brzeg wielokąta.

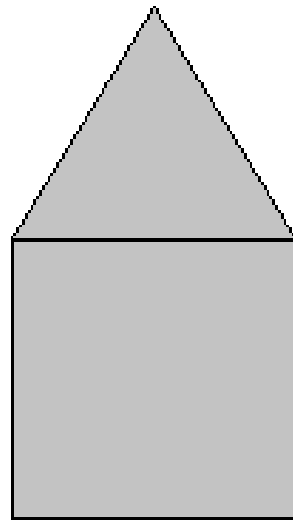
Boki i wierzchołki łamanej ograniczającej wielokąt nazywa się bokami i wierzchołkami wielokąta.

Wielokąty wypukłe



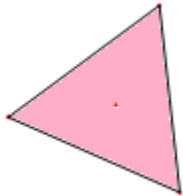
Wielokąty foremne

Wielokąt foremny to wielokąt, który ma wszystkie boki przystające i wszystkie kąty wewnętrzne tej samej miary.



Wielokąty foremne wypukłe

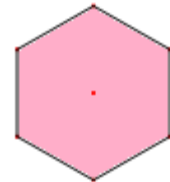
trójkąt
równoboczny



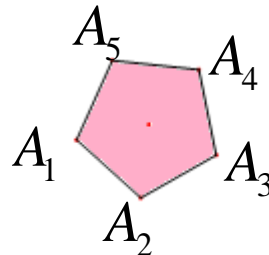
kwadrat



sześciokąt
foremny



pięciokąt foremny



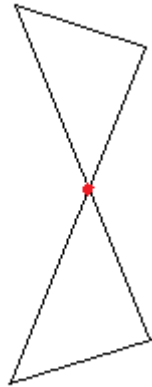


Punkty wielokrotne

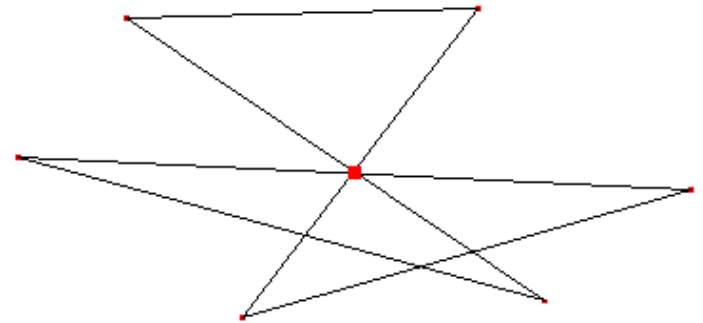
Jeśli łamana nie jest zwyczajna, czyli boki niesąsiadujące ze sobą mają punkty wspólne to takie punkty nazywamy **punktami wielokrotnymi**.

Łamane nie zwyczajne


punkt dwukrotny



punkt
potrójny



Ile maksymalnie punktów dwukrotnych może posiadać wielokąt?



Bok n -kąta nie może przeciąć sam siebie ani boków sąsiednich, więc może przeciąć najwyżej $n-3$ boki. Zatem największa możliwa liczba punktów podwójnych może być równa $\frac{n(n-3)}{2}$. Dlaczego? Czy można ją zawsze zrealizować?

Maksymalne możliwe liczby punktów dwukrotnych w:
trójkącie pięciokącie sześciokącie siedmiokącie ośmiokącie

$$\frac{3(3-3)}{2} = 0$$

$$\frac{5(5-3)}{2} = 5$$

$$\frac{6(6-3)}{2} = 6$$

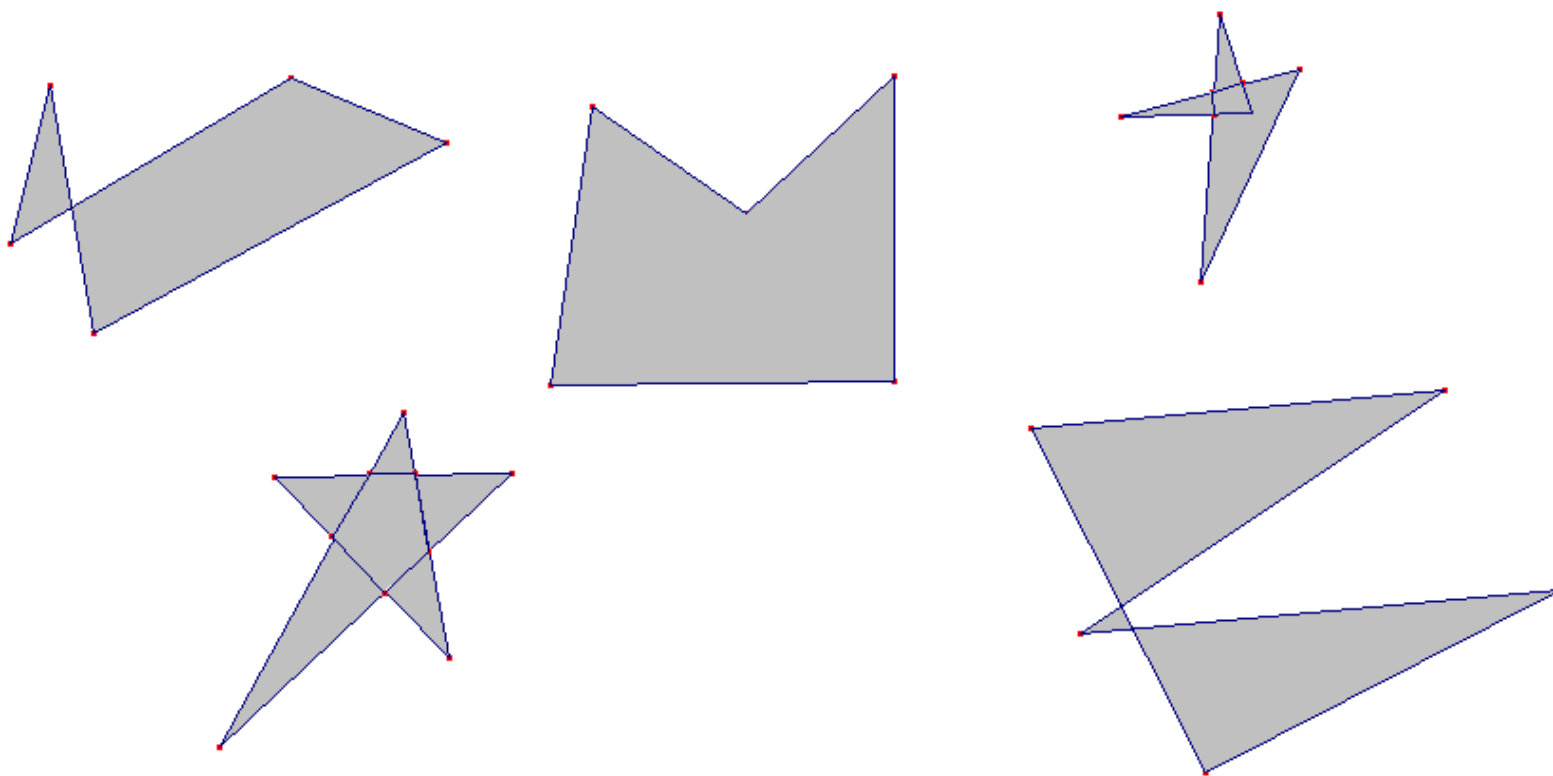
$$\frac{7(7-3)}{2} = 14$$


$$\frac{8(8-3)}{2} = 20$$

Czy istnieją wielokąty, które mają $0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n(n-3)}{2}$ punktów podwójnych?

Dla n **nieparzystych** istnieją wielokąty, dla których możliwe liczby punktów podwójnych są równe liczbom od 0 do $\frac{n(n-3)}{2}$ z wyjątkiem przedostatniej liczby $\frac{n(n-3)}{2} - 1$.

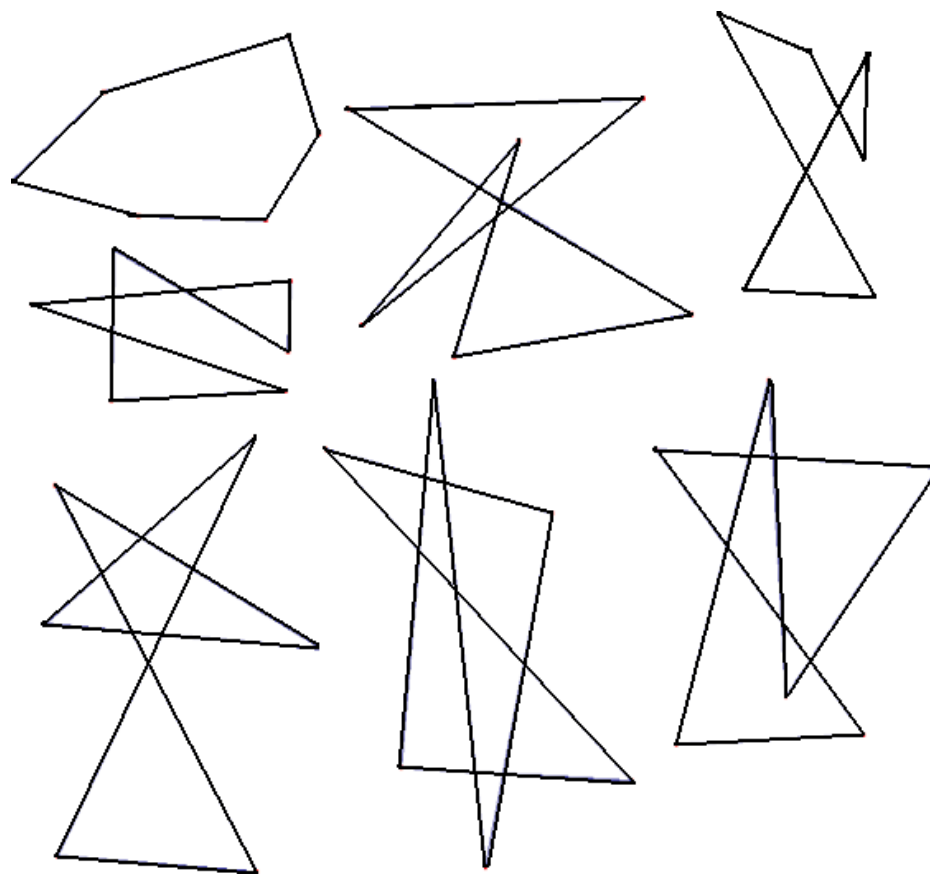
Na przykład dla $n = 5$ poniższe wielokąty mają 0, 1, 2, 3, 5 punktów podwójnych. Nie istnieje pięciobok z czterema punktami podwójnymi.





Dla n **parzystych** istnieją wielokąty, dla których liczby punktów podwójnych są równe kolejnym liczbom od 0 do $\frac{n(n-4)}{2} + 1$.

Na przykład dla $n=6$ poniższe wielokąty mają od 0 do 7 punktów podwójnych.



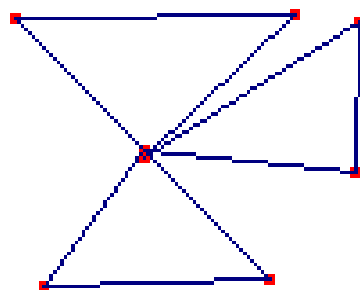
Jaka może być maksymalna krotność punktu w n -kącie?
Czy pięciokąt może mieć punkt potrójny?
A siedmiokąt punkt pięciokrotny?

Jeżeli liczba boków wielokąta wynosi n i ma on punkt k -krotny to zachodzi warunek $2k \leq n$.

Na przykład

- pięciokąt może mieć punkty co najwyżej dwukrotne, $k \leq 2,5$
- sześciokąt może mieć punkty co najwyżej trzykrotne, $k \leq 3$

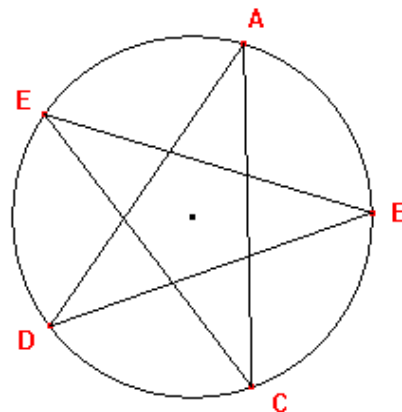
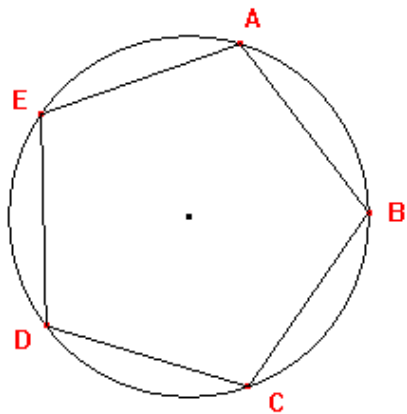
Sześciokąt z punktem trzykrotnym



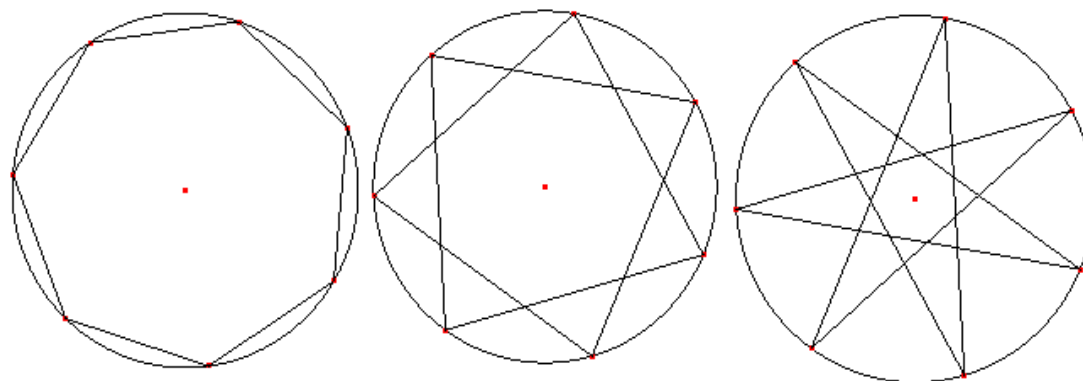
Jak budować wielokąty gwiaździste?

Łącząc po kolei punkty dzielące okrąg na 5 równych części, otrzymamy pięciokąt foremny wypukły.

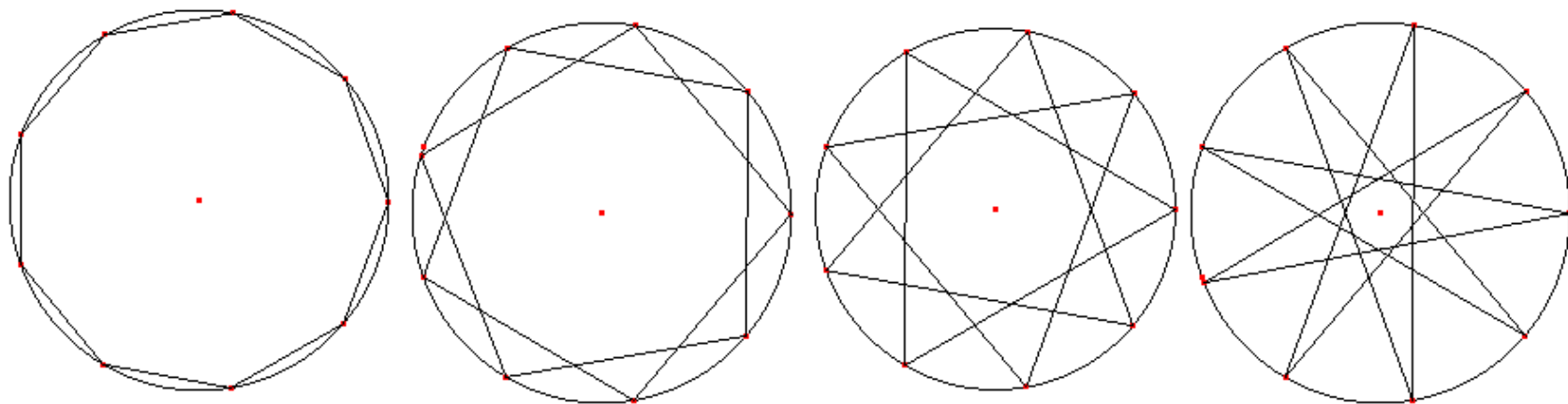
Łącząc co drugi punkt, otrzymamy pięciokąt foremny gwiaździsty.



Różne siedmiokąty foremne



Dziewięciokąty foremne



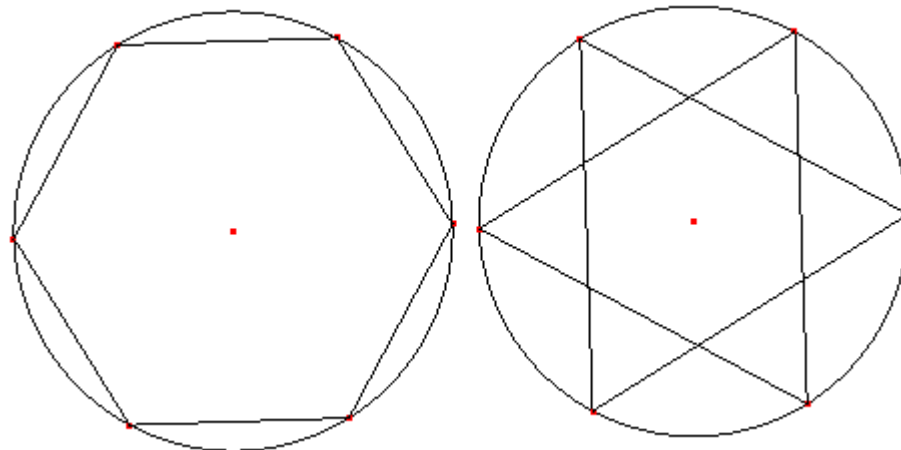
Ile jest różnych wielokątów foremnych o danej liczbie wierzchołków?

Sześciokąty foremne

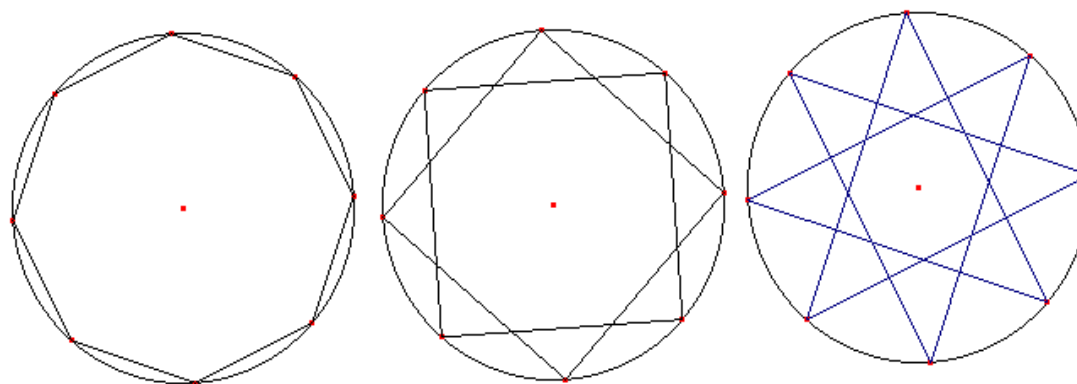
Łącząc kolejne punkty dzielące okrąg na sześć równych części, otrzymujemy sześciokąt foremny wypukły.

Łącząc co drugi wierzchołek, otrzymujemy trójkąt. Możemy połączyć pozostałe 3 punkty w drugi trójkąt. Otrzymamy gwiazdę sześcioramienną, która NIE JEST sześciokątem gwiaździstym. Dlaczego?

Gdy połączymy co trzeci wierzchołek, otrzymamy odcinek, a robiąc to samo z pozostałymi wierzchołkami, kolejne dwa odcinki, które utworzą gwiazdę sześcioramienną, która NIE JEST sześciokątem gwiaździstym.



Ośmiokąty foremne: wypukły i gwiaździsty oraz gwiazda ośmioramienna nie będąca ośmiokątem





Jan Brożek – polski matematyk (1585-1652) - podał sposób budowy n -kątowników gwiazdzistych.

- Jest ich tyle, co liczb k względnie pierwszych z n , nie przekraczających $n/2$. Otrzymamy je, łącząc co k wierzchołki wielokąta wypukłego.
- Liczby k będące dzielnikami n generują gwiazdy n -ramienne złożone z nałożonych na siebie nawzajem wielokątów wypukłych.
- Liczby k , które nie są dzielnikami n i nie są względnie pierwsze z n , generują gwiazdy n -ramienne złożone z wielokątów gwiazdzistych.

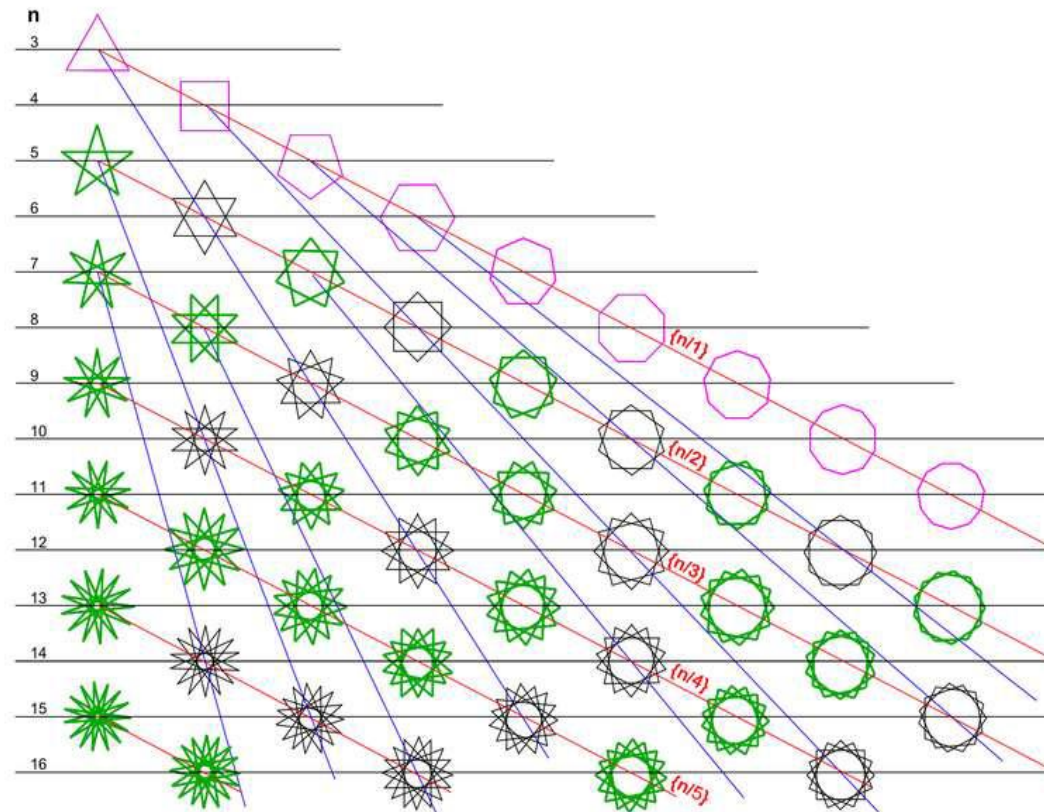


Istnieją:

- 2 pięciokąty foremne: wypukły dla $k=1$ i gwiaździsty dla $k=2$.
- 3 siedmiokąty foremne: wypukły dla $k=1$ i dwa gwiaździste (dla k równego 2 i 3).
- 2 ośmiokąty foremne: wypukły dla $k=1$ i gwiaździsty dla $k=3$ oraz dwie gwiazdy ośmioramienne nie będące ośmiokątami dla k równego 2 i 4.
- 3 dziewięciokąty foremne: wypukły dla $k=1$ i dwa gwiaździste dla k równego 2 i 4 oraz gwiazda dziewięcioramienna nie będąca dziewięciokątem dla k równego 3.

Wielokąty foremne i gwiazdy (brak czworokąta gwiazdzistego)

źródło: Wikipedia



Bibliografia

- Arkadiusz Biel „W świecie wielokątów gwiaździstych”
- Jadwiga Dianni, Adam Wachułka, *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, PZWS, Warszawa 1963.
- W. Krysicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski *Z geometrią za pan brat*, Iskry, Warszawa 1992.
- Praca zbiorowa *Encyklopedia szkolna - Matematyka*, WSiP, Warszawa 1998.
- Zofia Muzyczka, Marek Kordos *Słownik szkolny - Matematyka*, WSiP, Warszawa 1996.
- http://main3.amu.edu.pl/~wiadmat/131-138_kt_wm38.pdf „Brzozek czy Brożek”