

XVI MISTRZOSTWA POLSKI W GEOMETRII ELEMENTARNEJ

Wrocław, 9 VI 2018

Zad. 1. W trójkącie ABC stosunek długości boków wynosi 3:4:6. Niech K , L i M będą spodkami dwusiecznych kątów tego trójkąta. Oblicz stosunek pól trójkątów ABC i KLM .

Zad. 2. Wykaż, że jeśli cztery środkowe pięciokąta przecinają się w jednym punkcie, to pięta też przechodzi przez ten punkt. Środkową pięciokąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek pięciokąta ze środkiem przeciwległego boku.

Zad. 3. Przez wierzchołki B i C trójkąta ABC przechodzi okrąg przecinający boki AB i AC odpowiednio w punktach K i M . Oblicz długości MK i AM , jeśli $|AB| = 2$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$ i $|AK| = 1$.

Zad. 4. Przyprostokątne trójkąta mają długości a i b , a przeciwprostokątna ma długość c . Niech h będzie długością wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Wykaż, że trójkąt o bokach długości h , $c+h$ oraz $a+b$ jest prostokątny.

Zad. 5. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi: $|\sphericalangle ADC| < |\sphericalangle DCB|$ oraz dwusieczne sąsiednich kątów ADC i DCB przecinają się w punkcie leżącym na boku AB . Wykaż, że $|AB| = |AD| + |BC|$

Zad. 6. Prosta Eulera (przechodząca przez ortocentrum trójkąta ABC , jego środek ciężkości i środek okręgu na nim opisanego) jest równoległa do boku BC o długości a . Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi R , oblicz długość wysokości opuszczonej na bok BC .

Zad. 7. W trójkąt równoramienny, w którym $|AC| = |CB|$, wpisano okrąg. Styczna do tego okręgu równoległa do boku BC przecina bok AC w punkcie N takim, że $|AN| = \frac{3}{8} |AC|$. Znajdź promień okręgu wpisanego, jeśli pole trójkąta wynosi 12.

Zad. 8. Na odcinku AB obrano punkt M , a następnie na odcinkach AM i MB zbudowano kwadraty po jednej stronie prostej AB . Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punkcie N . Wykaż, że prosta AN przechodzi przez wierzchołek drugiego kwadratu.

Zad. 9. Stosunek długości boków pewnego trójkąta wynosi 3:4:5. W trójkąt ten wpisano okrąg. W jakim stosunku pozostają odcinki, na które punkty styczności dzielą każdy z boków?

Zad. 10. Przekątne czworokąta wypukłego są równe, a odcinki łączące środki przeciwległych boków mają długość odpowiednio p i q . Oblicz pole tego czworokąta.

Zad. 11. Na trójkącie ABC opisano okrąg. Bok AB przedłużono za punkt B do punktu B_1 , tak, że $|AB_1| = |AC|$. Dwusieczna kąta A przecina okrąg w punkcie W . Wykaż, że ortocentrum trójkąta AWB_1 leży na danym okręgu.

Zad. 12. Okrąg wpisany w trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q , (przy czym $|AB| > |AC|$). Niech R i S będą środkami boków AC i BC odpowiednio, a T – punktem wspólnym prostych RS i PQ . Wykaż, że T leży na dwusiecznej kąta B .