Zasada szufladkowa Dirichleta

50. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 61 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o 2.

51. Przy założeniach jak wyżej udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o 1.

52. Przy założeniach jak wyżej udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o $\sqrt{2}$.

53. Przy założeniach jak wyżej udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt prostokątny.

54. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 41 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o $\sqrt{3}$.

55. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewne 42 wierzchołki tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt mający co najmniej jeden kąt 60°.

56. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 50 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt mający co najmniej jeden kąt 72°.

57. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 81 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt równoboczny.

58. Dana jest liczba naturalna $n>1$ oraz liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$. Udowodnij istnienie takich liczb całkowitych dodatnich $i \neq j$ nie większych od $n+1$, że liczba $a_i - a_j$ jest podzielna przez n.

59. Dana jest liczba naturalna $n>1$ oraz liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n+1}$. Udowodnij istnienie takich różnych liczb całkowitych dodatnich i, j, k nie większych od $2n+1$, że liczba $(a_i-a_j)^2+(a_j-a_k)^2+(a_k-a_i)^2$ jest podzielna przez n.

60. Pewnych 8 wierzchołków 55-kąta foremnego pomalowano na czerwono, a następnie każde dwa czerwone punkty połączono odcinkiem. Udowodnij, że pewne dwa narysowane odcinki mają taką samą długość.

61. Pewnych 11 wierzchołków 55-kąta foremnego pomalowano na czerwono, a następnie każde dwa czerwone punkty połączono odcinkiem. Udowodnij, że pewne trzy narysowane odcinki mają taką samą długość.

62. Wewnątrz kwadratu o boku 10 wybrano 101 punktów. Udowodnij, że pewne dwa z tych punktów są odległe o mniej niż $3/2$.

63. Na płaszczyźnie zaznaczono 5 punktów kratowych. Udowodnij, że można wybrać takie dwa z nich, że środek odcinka, który je łączy, jest punktem kratowym.

Punktem kratowym nazywamy punkt o obu współrzędnych całkowitych – na papierze w kratkę punktami kratowymi są naroża kratek.