Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

Finał (klasy 4-6 SP)

1. Iloczyn pewnych 3 liczb pierwszych jest 5 razy większy od ich sumy. Jakie to liczby?

2. W koszyku znajduje się 30 grzybów – prawdziwków i maślaków. Wiadomo, że nie ważne jak wybierzemy 12 grzybów z koszyka, będzie wśród nich co najmniej jeden maślak. Podobnie, nie ważne jak wybierzemy 20 grzybów, będzie wśród co najmniej jeden prawdziwek. Ile prawdziwków i maślaków jest w koszyku?

3. Wiadomo, że $\frac{a+b}{b} = \frac{1}{4}$. Ile wynosi $\frac{3a}{a+b}$?

4. Na odcinku XY o długości 25 cm leżą punkty A, B, C, przy czym $|XA| = 12$ mm, $|BY| = 3$ cm, a $|AC| = 14{,}4$ cm. Jakie pole ma trójkąt PBC, jeżeli trójkąt PXY ma pole 250 mm^2?

5. Dwa okręgi o różnych promieniach są styczne zewnętrznie do siebie nawzajem i oba są styczne wewnętrznie do trzeciego okręgu o średnicy 20 cm. Środki trzech wspomnianych okręgów nie leżą na jednej prostej. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki wyżej opisanych okręgów.

6. Batony są sprzedawane w opakowaniach większych albo mniejszych. We wszystkich większych pudełkach jest łącznie ich 180, a w mniejszych jest $13\frac{1}{3}\%$ tego, co w dużych. Liczba mniejszych pudełek stanowi 20% liczby większych pudełek, a w każdym dużym pudełku jest o 6 batonów więcej niż w małym. Ile jest pudełek każdego rodzaju?

7. Piotrek przygotowuje się do sprawdzianu z matematyki. Rozpoczął naukę kilka minut po 17, a zakończył przed 18. Zarówno gdy rozpoczynał, jak i wtedy gdy kończył, wskazówki minutowa i godzinowa zegara tworzyły kąt 110°. Ile czasu Piotrek się uczył?

8. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q, dla których zachodzi $p^2 - 42q^2 = 1$.

9. Pewien mędrzec pustelnik całe swoje życie postanowił spędzić w ascezie, obliczając wartość iloczynu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2026$, a następnie sumę cyfr tej liczby. Potem planuje obliczać sumę cyfr otrzymanego wyniku, do momentu otrzymania liczby jednocyfrowej. Jaką liczbę otrzyma na koniec?

10. Zespoły A, B, C, D i E rozegrały między sobą turniej piłkarski. Przed zawodami pięciu kibiców przedstawiło następujące przewidywania.

- Zespół D zajmie 1 miejsce, Zespół B zajmie 2 miejsce
- Zespół A zajmie 2 miejsce, Zespół E zajmie 4 miejsce
- Zespół B zajmie 3 miejsce, Zespół D zajmie 5 miejsce
- Zespół B zajmie 1 miejsce, Zespół E zajmie 4 miejsce
- Zespół A zajmie 2 miejsce, Zespół B zajmie 3 miejsce.

Każdy kibic zgadł raz dobrze, a raz źle. Jakie były miejsca wszystkich zespołów?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

Rozwiązania zadań (klasy 4-6 SP)

1. Oznaczmy te liczby pierwsze przez p, q, r. Z warunków w treści mamy: $5(p+q+r) = pqr$. Ponieważ 5 dzieli lewą stronę i jest liczbą pierwszą, jedna z liczb musi być równa 5, bso $r = 5$. Wtedy mamy: $p + q + 5 = pq$. Z czego wynika $(p-1)(q-1) = 6$. Zatem z dokładnością do zamiany p, q miejscami mamy dwie możliwości $p - 1 = 2, q - 1 = 3$ lub $p - 1 = 1, q - 1 = 6$. Pierwsza opcja daje nam $q = 4$ co nie jest liczbą pierwszą. Druga opcja daje nam zatem jedyne rozwiązanie i te liczby to $2, 5, 7$.

2. W koszyku może być co najwyżej 11 prawdziwków, bo w przeciwnym przypadku pośród wybranych 12-stu prawdziwków nie byłoby żadnego maślaka. Analogicznie w koszyku jest co najwyżej 19 maślaków. Zatem #prawdziwków + #maślaków $\leqslant 11 + 19 = 30$. Więc prawdziwków w koszyku musi być 11, a maślaków 19.

3. $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$, więc $a = -\frac{3}{4}b$. Zatem $\frac{3a}{a+b} = \frac{-9/4 \cdot b}{-3/4 \cdot b + b} = -9$

4. Zauważmy, że ponieważ oba trójkąty mają wspólną wysokość, pole trójkąta PBC będzie tylukrotnie mniejsze, ilekroć bok BC jest krótszy od XY. $|BC| = |XY| - (|AX| + |AC| + |BY|) = 6,4$ cm. A zatem pole trójkąta PBC wynosi $\frac{6,4}{25} 250 \text{ mm}^2 = 64 \text{ mm}^2$.

5. Zauważmy, że odcinek łączący środki dwóch małych okręgów ma długość $r+R$, gdzie r, R to promienie małych okręgów. Z kolei, jeżeli przedłużymy odcinek łączący środek dużego ze środkami małych okręgów o ich odpowiednie promienie, to otrzymamy dwa promienie dużego okręgu. Wobec tego boki trójkąta zawierające środek dużego okręgu mają długości $10 - r$ i $10 - R$ odpowiednio. Łącznie obwód trójkąta to $10 - r + 10 - R + r + R = 20$.

6. Wnioskujemy z treści, że w mniejszych pudełkach są łącznie 24 batony. Niech b oznacza liczbę batonów w dużym pudełku, a k – liczbę dużych pudełek. Wtedy układamy równania

$$kb = 180$$
$$\frac{k}{5}(b-6) = 24$$

Z drugiego równania wnioskujemy, że

$$120 = k(b-6) = kb - 6k = 180 - 6k,$$

czyli $k = 10$ i tyle jest dużych pudełek, a małych jest 20% tego, czyli 2.

7. W ciągu jednej minuty wskazówka godzinowa obraca się o kąt $\frac{360^\circ}{12 \cdot 60} = 0,5^\circ$. Wskazówka minutowa zaś w ciągu minuty obraca się o kąt $360^\circ/60 = 6^\circ$. Załóżmy, że Piotrek uczył się t minut.

Mamy dwie możliwości: albo wskazówka minutowa jest za godzinową i kąt między nimi rośnie o 360°, albo najpierw wskazówka minutowa jest przed godzinową, a potem za nią, czyli kąt między nimi rośnie o 220°.

W pierwszym przypadku musi zatem być

$$(6 - 0,5)t = 360,$$

czyli

$$t = \frac{720}{11} > \frac{660}{11} = 60,$$

czyli Piotrek uczyłby się dłużej niż godzinę, co nie jest możliwe.

W drugim przypadku

$$(6 - 0,5)t = 2 \cdot 110,$$

czyli

$$t = 40.$$

8. Od razu widzimy, że p^2 musi być nieparzyste, gdyż $42q^2$ jest parzyste, a 1 nie. Wobec tego p jest nieparzyste. Przekształcamy równanie do postaci $42q^2 = p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$. Liczby $p+1, p-1$ są obie parzyste, zatem całość dzieli się przez 4. $42q^2$ jednak dzieli się przez 4 wyłącznie wtedy, gdy $q = 2$. Otrzymujemy zatem $p = 13$ i jest to jedyna para spełniająca równanie.

9. Będzie to liczba 9. 2026! jest podzielne przez 9, a suma cyfr liczby podzielnej przez 9 jest podzielna przez 9. Ponawiając ten proces, suma cyfr maleje, aż w końcu otrzymamy liczbę jednocyfrową, która musi być podzielna przez 9. Musi to być więc 9 lub 0, ale 0 być nie może z oczywistych powodów.

10. Gdyby drużyna A zajęła 2 miejsce, to dzięki prognozom 2 i 5 wiemy, że drużyna E nie zajęłaby 4 miejsce a drużyna B nie zajęłaby miejsca 3. Ale skoro B nie zajmuje miejsca 3 to D zajmuje miejsce 5 (prognoza 3), ale wtedy B musiałoby zająć 2 miejsce (prognoza 1). Daje nam to sprzeczność (A oraz B zajmują to samo miejsce).

Zatem drużyna A nie zajęła miejsca 2. Dlatego miejsca drużyn E i B to 4 i 3 (prognozy 2 i 5), ale wtedy D ma miejsce 1 (bo B nie ma miejsca 2). Dodatkowo A nie ma miejsca 2, a jedyne wolne miejsca to 2 i 5 więc ma miejsce 5. Zatem drużyny po kolei miejscami to: D, C, B, E, A. Taki ranking spełnia warunek prognoz z treści.