Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

Finał (klasy 7-8 SP)

1. Dla liczby naturalnej n symbolem $n!$ oznaczamy iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, tzn. iloczyn wszystkich liczb naturalnych między 1 a n. Jakie cyfry dziesiątek może mieć $n!$? Uznajemy, że liczba jednocyfrowa ma cyfrę dziesiątek równą zero.

2. Czy istnieje trójkąt o wysokościach długości 7, 3, 2?

3. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $x^2 = 2 \cdot 2026 + 16y^2$ w liczbach całkowitych, tzn. wszystkie pary (x, y) t. że liczby x, y są całkowite oraz spełniają powyższe równanie.

4. Czy z dowolnych 42 liczb naturalnych można wybrać 7 tak, aby suma wybranych liczb była podzielna przez 7?

5. Po zewnętrznej stronie równoległoboku $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne BPC i CQD. Pokaż, że trójkąt APQ także jest równoboczny.

6. W szkole podstawowej w Bychawie uczy się 20 dzieci. Wiadomo, że każda para uczniów ma co najmniej jednego wspólnego dziadka. Pokaż, że jeden z dziadków ma co najmniej 14 wnucząt uczęszczających do tej szkoły.

7. Na bokach sześciokąta napisano 6 liczb, a na każdym wierzchołku napisano sumę liczb z boków, na których leży. Następnie zmazano wszystkie liczby z boków i z jednego z wierzchołków. Czy da się odzyskać liczbę, która była napisana na tym wierzchołku?

8. W trójkącie ΔABC zachodzi zależność $\sphericalangle CAB < \sphericalangle CBA$. Udowodnij, że $|BC| < |AC|$.

9. Antek i Bartek grają razem w następującą grę. Antek wymyśla pewną liczbę dwucyfrową, a następnie Bartek w kolejnych próbach próbuje ją zgadnąć. Jeżeli liczba, którą zgadł Bartek, różni się od liczby Antka na cyfrze jedności albo na cyfrze dziesiątek o co najwyżej 1 to gra się kończy (przykładowo, jeżeli liczba Antka to 75 to 65 i 76 kończą grę, ale 84 nie). Pokaż, że Bartek może grać tak, aby gra skończyła się po co najwyżej 22 turach.

10. Liczby od 1 do 101 zapisano po kolei od lewej do prawej, tworząc w ten sposób pewną liczbę. Pokaż, że jest ona złożona i nie jest kwadratem.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

Rozwiązania zadań (klasy 7-8 SP)

1. Zauważmy, że dla $k \geqslant 10$ w $k!$ występują czynniki $2, 5, 10$, a więc cały $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 \mid k!$, więc cyfra dziesiątek zawsze wynosi 0. Ręczne sprawdzenie $k!$ dla $k = 1, 2, \ldots, 9$ pokazuje, że pojawiają się cyfry $0, 2, 4, 8$.

2. Nie istnieje. Załóżmy nie wprost, że P to pole takiego trójkąta. Musiałby on mieć boki długości

$$\frac{2P}{7} < \frac{2P}{3} < \frac{2P}{2}.$$

Żeby spełniać warunek trójkąta, musiałoby zatem być

$$\begin{aligned} \frac{2P}{7} + \frac{2P}{3} &> \frac{2P}{2} \\ \frac{1}{7} + \frac{1}{3} &> \frac{1}{2} \\ \frac{6}{42} + \frac{14}{42} &> \frac{21}{42} \\ \frac{20}{42} &> \frac{21}{42} \end{aligned}$$

Jest to oczywiście sprzeczne, co kończy dowód.

3. Przenosząc y na drugą stronę otrzymujemy równanie

$$(x - 4y)(x + 4y) = 2 \cdot 2 \cdot 1013,$$

gdzie po prawej stronie jest rozkład liczby $2 \cdot 2026$ na czynniki pierwsze. Zauważmy, że oba czynniki z lewej strony równania muszą być tej samej parzystości. Daje to cztery możliwości rozkładu w liczbach całkowitych:

$$2 \cdot 2026 = 2026 \cdot 2 = -2 \cdot -2026 = -2026 \cdot -2.$$

Uzyskujemy zatem cztery układy równań, np.

$$\begin{aligned} x - 4y &= -2 \\ x + 4y &= -2026 \end{aligned}$$

Z tego układu otrzymujemy rozwiązanie $(x, y) = (-1014, 253)$. W czterech przypadkach nasze cztery rozwiązania to: $(1014, -253), (1014, 253), (-1014, 253), (-1014, -253)$.

4. Tak, jest to zawsze możliwe. Zauważmy, że $42 = 7 \cdot 6$. Mamy zatem dwa przypadki: albo któraś reszta z dzielenia przez 7 występuje wśród naszych 42 liczb 7 lub więcej razy, albo wszystkie reszty występują po 6 razy.

W pierwszym przypadku wybieramy 7 liczb o tej samej reszcie r. Wtedy ich suma ma resztę taką samą jak

$$r + r + \ldots + r = 7r,$$

czyli jest podzielna przez 7.

W drugim przypadku wybieramy 7 liczb tak, by skorzystać z każdej możliwej reszty z dzielenia przez 7 raz. Suma ma wtedy resztę taką samą jak

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = 3 \cdot 7,$$

czyli też jest podzielna przez 7.

5. Oznaczmy $a = |AD| = |BC| = |BP| = |CP|$, $b = |AB| = |CD| = |CQ| = |DQ|$ oraz $\alpha = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$. Wtedy $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 180^\circ - \alpha$ z własności równoległoboku.

Pokażemy, że trójkąty ΔABP, ΔQCP oraz ΔQDA są przystające z cechy *bkb*. Bok AB (i odpowiadające) mają długość b, a boki BP i odpowiadające ma długość a. Obliczamy

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCP = 180^\circ - \alpha + 60^\circ = 240^\circ - \alpha.$$

Zupełnie analogicznie obliczamy $\sphericalangle QDA = 240^\circ - \alpha$. Dla ostatniego kąta korzystamy z tego, że znamy wszystkie kąty dookoła

$$\sphericalangle QCP = 360^\circ - \sphericalangle QCD - \sphericalangle DCB - \sphericalangle BCP = 360^\circ - 60^\circ - \alpha - 60^\circ = 240^\circ - \alpha,$$

co kończy dowód przystawania trójkątów.

6. Jeżeli wszyscy uczniowie mają tych samych dwóch dziadków (są kuzynami) to każdy z tych dziadków ma 20 wnucząt. Jeżeli tak nie jest, to istnieją dwaj uczniowie: Frania, której dziadkami są Alojzy i Bartłomiej oraz Jasia, której dziadkami są Alojzy i Czesław (Frania i Jasia muszą mieć jednego wspólnego dziadka). Jeżeli w tej klasie jest Hania, której tylko jednym z dziadków jest Alojzy, Bartłomiej albo Czesław to jej dziadkiem jest Alojzy, bo musi mieć wspólnego dziadka z Franią i Jasią. Wówczas wszyscy pozostali uczniowie muszą być wnukiem Alojzego, bo muszą mieć wspólnego dziadka z Franią, Jasią i Hanią. Wtedy Alojzy ma 20 wnucząt.

W przeciwnym przypadku, gdy w szkole nie ma takiej osoby jak Hania, to Alojzy, Bartłomiej i Czesław są jedynymi dziadkami osób w tej szkole. Możemy wtedy podzielić uczniów tej szkoły na 3 zbiory AB - wnuczęta Alojzego i Bartłomieja, BC - wnuczęta Bartłomieja i Czesława, AC - wnuczęta Alojzego i Czesława. Gdyby wszystkie te zbiory miałyby co najmniej 7 uczniów, to w tej szkole byłoby co najmniej $7 + 7 + 7 = 21$ uczniów, co jest niemożliwe. Zatem bez straty ogólności załóżmy, że w BC jest co najwyżej 6 uczniów. Wtedy Alojzy ma co najmniej $20 - 6 = 14$ wnucząt.

7. Da się to zrobić. Nazwijmy liczby na wierzchołkach tego sześciokąta A, B, C, D, E, F, gdzie A jest wierzchołkiem, z którego zmazano liczbę. Zauważmy, że przed zmazaniem musiało zachodzić $A + C + E = B + D + F$, ponieważ lewa i prawa strona są równe sumie liczb zapisanych na krawędziach. Zatem $A = B + D + F - C - E$.

8. Z podanej nierówności miar kątów wynika, że możemy znaleźć na boku AC taki punkt D, że $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CAB$. Trójkąt ΔABD jest wtedy równoramienny, tzn. zachodzi $|AD| = |BD|$. Łącząc ten fakt z nierównością trójkąta w trójkącie ΔBDC otrzymujemy

$$|BC| < |BD| + |DC| = |AD| + |DC| = |AC|.$$

9. Umieśćmy wszystkie liczby od 10 do 99 w tabeli o 10 kolumnach i 9 wierszach w taki sposób, aby kolumna odpowiadała cyfrze jedności a wiersz cyfrze dziesiątek. Każdy ruch Bartka wyklucza co najwyżej 5 możliwości na liczbę Antka (na szachownicy wygląda to jak +). Widzimy więc, że zadaniem Bartka jest wybrać 22 takich liczb, aby zamalowanie odpowiednich "plusów" pokryło całą szachownicę. Może on to zrobić, wybierając na przykład liczby:

$$11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97$$

.

10. Policzmy sumę cyfr tej liczby. Każda z cyfr $1, \ldots, 9$ występuje jako cyfra dziesiątek liczby zapisanej 10 razy. Każda z cyfr $0, \ldots, 9$ pojawia się jako cyfra jedności liczby dwucyfrowej 9 razy. Zatem suma cyfr jest równa:
$1 + 2 + \cdots + 9 + 10 \cdot (1 + 2 + \ldots 9) + 9 \cdot (0 + 1 + \ldots 9) + (1 + 0 + 0) + (1 + 0 + 1) = 903$. Zatem jest ona podzielna przez 3, więc jest złożona, ale nie przez 9, więc nie jest kwadratem.