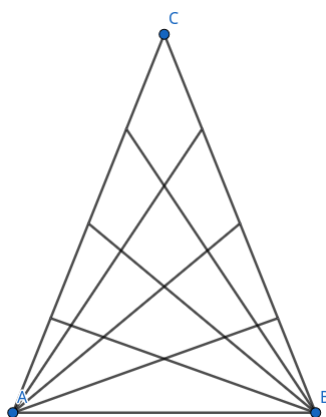
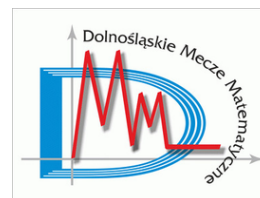


1. Na stole leżą trzy kartki papieru. Na każdej z nich jest napisana inna, niezerowa cyfra. Ułożono z nich dwie liczby trzycyfrowe: największą i drugą co do wielkości. Okazało się, że ich suma wynosi 1233. Jakie cyfry były na kartkach?
2. W klasie VI jest 26 uczniów. Udowodnić, że można wskazać 6 uczniów tej klasy, którzy mieszkają przy tej samej ulicy lub 6 uczniów, z których każdy mieszka przy innej ulicy.
3. Jeżeli podzielimy 100 przez p to otrzymamy m i resztę 6. Ile wynosi p i m , jeśli wiemy, że p jest liczbą pierwszą?
4. Ile jest trójkątów na rysunku na dole strony?
5. Stosik trzech kubków, włożonych jeden w drugi, ma 20 centymetrów. Stosik pięciu kubków ułożonych tak samo ma 26 centymetrów. Jaką wysokość ma stos 9 kubków?
6. 99% objętości litra mleka stanowi woda. Ile trzeba odparować wody, stanowiła ona 98% objętości płynu?
7. Ile jest trójkątów równoramiennych, które mają boki o długościach całkowitych oraz w których najdłuższy bok ma długość 2026?
8. Liczba a w zapisie dziesiętnym to 999 dziewiątek. Ile dziewiątek ma w zapisie dziesiętnym liczba $11 \cdot a$?
9. Ile dzielników ma liczba 2025?
10. Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę o 50% większą niż inny kąt tego trójkąta. Jaka jest miara najmniejszego kąta tego trójkąta?





1. Niech $a > b > c$ będą cyframi zapisanymi na kartkach. Z warunków w treści wiemy, że $(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) = 200a + 11b + 11c = 1233 = 1200 + 33$. Jeżeli $a < 6$ to suma jest mniejsza od $200 \cdot 6 + 11(9 + 8) = 1187$ zatem $a \geq 6$. Z drugiej strony, jeśli $a > 6$, to suma będzie większa niż $7 \cdot 200 = 1400$. Zatem $a = 6$. Wtedy wiemy, że $11(b + c) = 33$. Ponieważ $b, c \neq 0$, to $b = 2$ i $c = 1$. Sprawdzenie: $621 + 612 = 1233$.
2. Jeżeli istnieje ulica, przy której mieszka 6 lub więcej uczniów, to warunek jest spełniony. Jeżeli nie to przy każdej ulicy mieszka co najwyżej 5 uczniów. Ulic, przy których mieszka jakiś uczeń, jest więcej niż 5, bo $5 \cdot 5 = 25 < 26$. Możemy zatem wybrać 6 różnych ulic i po jednym uczniu mieszkającym przy każdej z nich.
3. p jest różne od 1 i 2, bo przy dzieleniu 100 przez p otrzymaliśmy niezerową resztę. Z treści $pm + 6 = 100$, więc $pm = 94$. Liczbę 94 możemy zapisać jako iloczyn dwóch liczb całkowitych na dwa sposoby: $94 = 94 \cdot 1 = 47 \cdot 2$. Ponieważ $p > 2$ i p jest pierwsze, widzimy że $p = 47$ i $m = 2$.
4. Zauważmy, że każdy trójkąt ma przynajmniej jeden wierzchołek na dolnym boku. Policzmy osobno trójkąty z wierzchołkiem w dokładnie jednym i w obu z nich. Trójkątów z dwoma wierzchołkami na dolnej krawędzi jest tyle, co pozostałych punktów na obrazku, czyli $4 \cdot 4 = 16$ (wybieramy po jednej prostej z każdego wierzchołka). Żeby uzyskać trójkąt zawierający prawy dolny wierzchołek, ale nie lewy, musimy wybrać dwie z prostych przechodzących przez prawy wierzchołek, ale nie przez lewy, i jedną z prostych przechodzących przez lewy, ale nie przez prawy. Łącznie mamy zatem możliwości

$$2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 + 16 = 64.$$

5. Z podanych informacji wnioskujemy, że włożenie dwóch kubków dodaje 6 cm, zatem jeden kubek dodaje 3 cm. Zatem, dokładając 4 kubki do stosu 5 kubków uzyskujemy stos 9 kubków o wysokości $26 + 4 \cdot 3 = 38$ centymetrów.
6. Litry mleka zawiera 10 ml substancji innych niż woda. Jeśli woda ma stanowić 98% mieszaniny, cała mieszanina musi być 50 razy większa, czyli mieć 500 ml. Zatem trzeba odparować

$$(1000 - 10) - (500 - 10) = 500 \text{ ml.}$$

7. Mamy trzy przypadki: albo jest to trójkąt równoboczny, albo bok 2026 jest ramieniem, albo ramię trójkąta równoramiennego jest krótsze niż 2026. W drugim przypadku, korzystając z nierówności trójkąta, mamy możliwości od 1 do 2025 na długość trzeciego boku. W przypadku trzecim na długość ramienia mamy możliwości od 1014 do 2025, czyli 1012 możliwości. Razem

$$1 + 2025 + 1012 = 3038.$$

8. $11a = 10a + a$. Obliczając tę sumę pisemnie, zauważmy, że cyfra jedności wyniku to 9, cyfra dziesiątek to 8 i przenosimy jedynekę, przy czym od teraz wszędzie dodawanie będzie skutkowało cyfrą 8 i przeniesieniem jedynki: od setek wzwyż dostajemy same dziewiątki aż do momentu, gdy zostaje nam sama dziewiątka (pierwsza cyfra od lewej liczby $10a$). Wówczas przeniesiona z poprzedniej kolumny jedynka sprawi, że dostaniemy cyfrę 0 i przeniesienie jedynki. Ostatecznie wynik to 1, 0, 997 dziewiątek, 8, 9. Liczba $11a$ ma więc w swoim zapisie 998 dziewiątek.

9. Rozkładamy na czynniki pierwsze: $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Każdy dzielnik liczby 2025 musi być iloczynem nie więcej niż 4 trójek i nie więcej niż dwóch piątek. Przy czym trójka albo piątka może też nie wystąpić. Możliwość jest zatem $5 \cdot 3 = 15$.
10. Należy zauważyć, że opisano dwa rodzaje trójkątów. Przypadek pierwszy: gdy oba kąty związane tą zależnością są ostre oraz przypadek drugi, gdy to kąt prosty jest większy o 50% od jednego z ostrych kątów. Niech α, β to będą kąty ostre tego trójkąta, przy czym $\beta > \alpha$.

W przypadku pierwszym ($\beta = \frac{3}{2}\alpha$) mamy $\alpha + \frac{3}{2}\alpha = 90^\circ$, z czego wyliczamy $\alpha = 36^\circ$, a więc $\beta = 54^\circ$.
W drugim zaś mamy $90^\circ = \frac{3}{2}\beta$, czyli $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$.