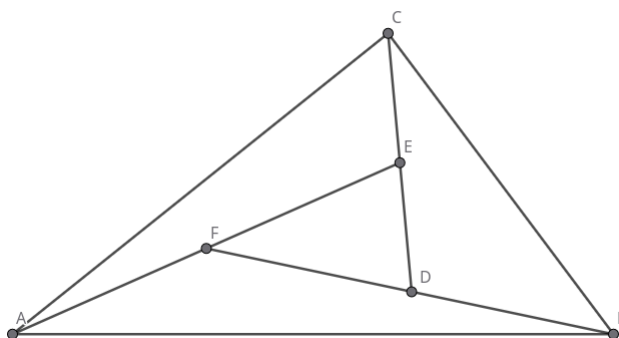
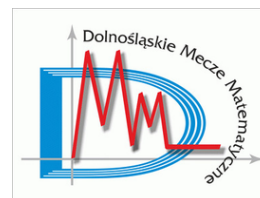


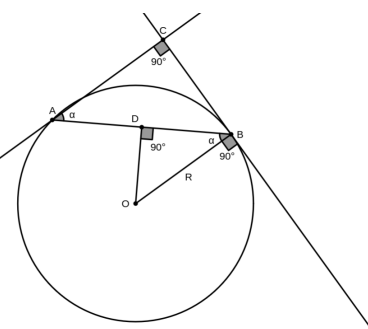
1. Czy istnieje kwadrat, którego bok ma długość równą liczbie całkowitej, a pole zapisuje się liczbą złożoną z 2028 jedynek?
2. W pewnym bloku mieszkają 123 osoby, które razem mają 3813 lat. Czy można wybrać z tego bloku pewnych 100 mieszkańców, którzy razem mają nie mniej niż 3100 lat?
3. AB jest cięciwą okręgu o promieniu R . W punkcie B poprowadzono styczną do tego okręgu. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do stycznej przecina ją w punkcie C . Udowodnić, że stosunek $\frac{|AB|^2}{|AC|}$ nie zależy od wyboru cięciwy.
4. Oblicz sumę: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.
5. Domy Alojzego i Bogusza znajdują się po tej samej stronie prostej drogi, która jest równoległa do prostej łączącej te domy. Oba budynki znajdują się odległości 20 metrów od drogi, a odległość między domami Alojzego i Bogusza to 40 metrów. Gdzie na drodze znajduje się punkt, w którym suma odległości od obu domów jest najmniejsza możliwa?
6. Na rysunku u dołu strony punkty D, E, F są środkami odcinków odpowiednio BF, CD, AE . Jeśli pole trójkąta DEF to 10, jakie jest pole trójkąta ABC ?
7. Drużyna nauczycieli gra z drużyną uczniów w konkursie naukowym. Łącznie uczniów i nauczycieli jest 15. Filomena chce dołączyć do rozgrywki. Jeśli Filomena dołączy do uczniów, podniesie ich średnią wieku z 12 do 14 lat, a jeśli dołączy do nauczycieli obniży ich średnią z 55 do 52 lat. W jakim wieku jest Filomena?
8. Po imprezie sylwestrowej kilku znajomych małżeństw uczestnicy pożegnali się uściskami dłoni. Wymieniono 112 uścisków dłoni, po czym małżeństwa udały się razem do swoich domów. Ile łącznie małżeństw witało nowy rok na tej imprezie?
9. Ile co najmniej różnych liczb naturalnych należy wylosować, aby mieć pewność, że znajdziemy wśród nich dwie, których różnica dzieli się przez 2026?
10. Reszta z dzielenia pewnej liczby pierwszej przez 21 okazała się być liczbą złożoną. Jaka mogła być ta reszta?





1. Taki kwadrat nie istnieje. Liczba 2028 jest podzielna przez 3 ale nie przez 9, korzystając z zasad podzielności przez 3 i 9 wiemy, że to samo tyczy się pola kwadratu. Ale pole kwadratu jest kwadratem liczby całkowitej, zatem jeżeli jest podzielne przez 3, to jest też podzielne przez 9.
2. Niech $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{123}$ odpowiednio oznaczają wiek osób mieszkających w tym bloku. Rozważmy przypadki w zależności od tego, czy $l_{23} < 31$. Jeśli tak, to suma pierwszych 23 wieków to najwyżej $23 \cdot 30 = 690$, więc suma pozostałych to co najmniej $3813 - 690 = 3123$. Jeśli natomiast $l_{23} \geq 31$, to suma od l_{34} do l_{100} wynosi co najmniej $31 \cdot 100 = 3100$. Zatem w obu przypadkach da się zrobić to, co trzeba w zadaniu.

Niech D będzie środkiem cięciwy AB a O środkiem okręgu. Kąt ODB jest prosty a kąty CAB i DBO są równe, bo odcinki AC i OB są równoległe. Zatem trójkąty ABC i ODB są podobne, ponieważ mają odpowiednie kąty równe. Więc $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|} = \frac{R}{\frac{1}{2}|AB|}$, co po przekształceniu daje nam $\frac{|AB|^2}{|AC|} = 2R$. Zatem ten stosunek zależy tylko od promienia okręgu.



4. $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
Dlatego $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = -1 + \sqrt{100} = 9$.
5. Niech punkt A oznacza dom Alojzego, a B – dom Bogusza. Ponadto niech prosta ℓ będzie drogą, a C szukanym najbliższym punktem. Niech B' – odbicie symetryczne punktu B w prostą ℓ . Wtedy $|AC| + |BC| = |AC| + |B'C|$. Ta druga suma jest najmniejsza, gdy C leży na prostej AB' . Punkt C musi być zatem środkiem między rzutami prostokątnymi punktów A, B na ℓ . Z tw. Pitagorasa lub własności trójkąta prostokątnego równoramiennego odległość wynosi:

$$2 \cdot 20\sqrt{2} = 40\sqrt{2}.$$

6. Przypomnijmy następujący fakt: trójkąty o równych podstawach i wysokościach mają równe pole. W szczególności, jeśli M jest środkiem odcinka XY , to trójkąty XMZ i YMZ mają równe pola. W szczególności trójkąt CEF ma pole równe polu trójkąta DEF , czyli 10. Z tego samego faktu wynika, że takie samo pole ma trójkąt AFC . Zatem pole trójkąta ACE to 20. Analogicznie wnioskujemy, że pola trójkątów CBD i BAF to 20, więc trójkąt ABC ma łącznie pole $3 \cdot 20 + 10 = 70$.
7. Niech n oznacza liczbę uczniów. Nauczycieli jest zatem $15 - n$. Łączny wiek uczniów to $12n$, a nauczycieli $54(15 - n)$. Wykorzystując informację o wieku Filomeny otrzymujemy równania

$$\frac{12n + f}{n + 1} = 14$$

$$\frac{55(15 - n) + f}{16 - n} = 52$$

Przekształcamy pierwsze równanie

$$14 = \frac{12n + f}{n + 1} = \frac{12(n + 1) + f - 12}{n + 1} = 12 + \frac{f - 12}{n + 1},$$

co po przekształceniu daje $2 = (f-12)/(n+1)$. Przenosząc mianownik na drugą stronę i, powtarzając te kroki dla drugiego równania, otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}f - 12 &= 2(n + 1) \\ 55 - f &= 3(16 - n)\end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań daje $f = 28$.

8. Niech m oznacza liczbę małżeństw na imprezie. Każdy uczestnik imprezy pożegnał się z każdym poza swoim małżonkiem, zatem uścisków dłoni było łącznie $2m(2m-2)/2 = 2m(m-1)$ – musimy podzielić przez 2, gdyż każdy uścisk liczymy podwójnie. Z równania $2m(m-1) = 56$ obliczamy, że $m = 8$.
9. Różnica dwóch liczb dzieli się przez 2026 wtedy i tylko wtedy, gdy przystają do siebie modulo 2026 to znaczy obie dają tę samą resztę z dzielenia przez 2026. Reszt z takiego dzielenia jest 2026 (od 0 do 2025), zatem musimy wylosować aż 2027 liczb aby z zasady szufladkowej mieć pewność, że któraś reszta się powtórzy.
10. Niech p to ta liczba pierwsza. Wtedy $p = k \cdot 21 + r$, dla pewnych naturalnych k, r , przy czym r jest złożone. Ponieważ $r < 21$ to może być równe 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20. Liczba r jednak nie może być podzielna przez żaden dzielnik liczby 21 oprócz 1, bo wtedy $k \cdot 21 + r$ byłoby podzielne przez ten dzielnik co przeczy pierwszości p . Po wykluczeniu takich kandydatów na r zostają nam jedynie 4, 8, 10, 16, 20. Można sprawdzić, że takie reszty przy dzieleniu przez 21 otrzyma się odpowiednio dla 67, 29, 31, 37, 41.