Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

**Eliminacje** (klasy 4-6 SP)

**1.** Czy wynik działania $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + \cdots + 2025)$ jest liczbą parzystą?

**2.** Kazik ułożył sześcian z dwudziestu siedmiu tradycyjnych kostek do gry. Jaka jest największa suma oczek jaką może zobaczyć jednocześnie na jego ścianach? Kazik nie obraca sześcianu, ani nie używa luster. Na dole strony znajduje się siatka standardowej kostki do gry.

**3.** Mariusz napisał na tablicy liczbę, złożoną z zapisanych ciurkiem koło siebie liczb od 1 do 88 w kolejności rosnącej. Czy otrzymana przez niego liczba jest kwadratem liczby naturalnej?

**4.** Reszta z dzielenia pewnej liczby pierwszej przez 21 jest liczbą złożoną. Jakie liczby mogą być tymi resztami?

**5.** Tabelka $3 \times 3$ jest początkowo wypełniona zerami i jest modyfikowana przy pomocy następujących operacji:
(1) dodanie 1 do każdej komórki w wybranym wierszu
(2) dodanie 2 do każdej komórki w wybranej kolumnie
wykonano $a$ operacji (1) i $b$ operacji (2) i w wyniku uzyskano tabelkę:

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 1 | 5 |
| 9 | 3 | 7 |
| 8 | 2 | 6 |

Ile wynosi $a$ i $b$?

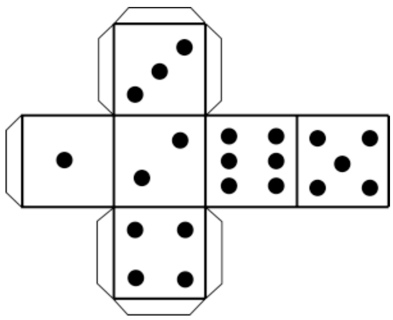
**6.** Tomek wypisał na tablicy wszystkie liczby naturalne od 1 aż do swojej ulubionej liczby naturalnej. Zauważył, że na tablicy cyfra 7 pojawia się dokładnie 30 razy. Jaka jest ulubiona liczba Tomka?

**7.** Jacek jest w pokoju z siedmioma innymi osobami. Każda z osób została zapytana z iloma osobami w tym pokoju się przyjaźni. Odpowiedzi wszystkich poza Jackiem to: $5, 7, 4, 7, 3, 3, 7$. Z iloma osobami w tym pokoju przyjaźni się Jacek?

**8.** Jakiego dnia tygodnia rozpoczyna się rok, który ma tyle samo śród i wtorków, ale mniej czwartków niż śród?

**9.** Pius płynie łodzią po rzece. W dzień, gdy wiosłuje, pokonuje 15 kilometrów w górę rzeki. W nocy, gdy odpoczywa, nurt rzeki znosi go 7 kilometrów w dół. W którym dniu swojej podróży Pius dopłynie do celu, jeśli jest on 100 kilometrów w górę rzeki od miejsca, gdzie zaczynał podróż?

**10.** Trójkąt $ABC$ jest równoramienny, tzn. zachodzi $AB = AC$. Na boku $AC$ wybrano punkt $P$ t. że $\sphericalangle BPC = 120°$, wiadomo też, że $\sphericalangle ABP = 50°$. Jaka jest miara kąta $\sphericalangle PBC$?



Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

**Rozwiązania zadań** (klasy 4-6 SP)

**1.** Nie jest. Zauważmy, że liczby parzyste w podanym działaniu nie wpływają na parzystość wyniku. Przegrupowując okazuje się że musimy dodać 2025 jedynek, 2023 trójki, itd. Czyli parzystość szukanego wyniku jest taka sama jak parzystość $1 \cdot 2025 + 3 \cdot 2023 + \cdots + 2025 \cdot 1$. Każda z tych liczb jest nieparzysta, a jest ich $\frac{(2025+1)}{2} = 1013$. Wynik działania jest zatem nieparzysty.

**2.** Kazik na raz może zobaczyć trzy ściany sześcianu. Widać wtedy trzy ścianki jednej kostki w narożniku, po dwie ścianki każdej z sześciu kostek na krawędziach oraz po jednej ściance pozostałych dwunastu kostek. Maksymalnie Kazik może ujrzeć więc $(6 + 5 + 4) + 6 \cdot (6 + 5) + 12 \cdot 6 = 153$.

**3.** Nie jest. Zauważmy, że dla liczby naturalnej $n$, cyfra jedności $n^2$ zależy tylko od cyfry jedności $n$. Sprawdzając możliwe cyfry jedności $n$ od 0 do 9 otrzymujemy, że tylko $1, 4, 6, 9$ są możliwymi cyframi na końcu kwadratów, a liczba z zadania kończy się na 8.

**4.** Po odsianiu liczb pierwszych spośród wszystkich możliwych reszt modulo 21, zostały nam liczby $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20$. Musimy jednak pozbyć się liczb podzielnych przez 3 oraz 7. Załóżmy bowiem, że nasza liczba pierwsza $p$ jest równa $21 \cdot k + r$, gdzie $k$ to pewna liczba naturalna, zaś $r$ to reszta. Jeżeli $r = 3r'$, to $p = 21k + 3r' = 3 \cdot (7k + r')$, co przeczy pierwszości $p$. Dla $r = 7r'$ sytuacja wygląda analogicznie. Pozostałe możliwe reszty to $4, 8, 10, 16, 20$. Przykładowe liczby pierwsze dla tych reszt to $67, 29, 31, 37, 41$.

**5.** Ponieważ druga kolumna zawiera liczbę 1 operacja (2) nie została wykonana na tej kolumnie. Aby uzyskać odpowiednie wartości w tej kolumnie trzeba wykonać operacje (1) 6 razy otrzymując w ten sposób tabelkę:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 2 |

Aby z tej tabelki uzyskać tabelkę końcową trzeba użyć operacji (2) 3 razy na pierwszej kolumnie i 2 razy na trzeciej kolumnie. Zatem $a = 6$, $b = 5$.

**6.** Zauważmy, że wśród liczb $1, \ldots, 100$ cyfra 7 pojawi się dokładne 20 razy (10 razy jako cyfra jedności i 10 razy jako cyfra dziesiątek).
Kolejne 10 liczb zawierające cyfrę 7 to: $107, 117, 127, 137, 147, 157, 167, 170, 171, 172$. Następna liczba po 172 też zawiera cyfrę 7, zatem 172 musi być ostatnią liczbą jaką napisał Tomek, czyli też jego ulubioną.

**7.** Osoby, które odpowiedziały 7, przyjaźnią się ze wszystkimi w tym pokoju. Są 3 takie osoby, więc są one jedynymi przyjaciółmi osób, które odpowiedziały 3. Prócz tych 5 osób pozostaje Jacek, osoba, która odpowiedziała 5 oraz osoba, która odpowiedziała 4. Zatem osoba, która odpowiedziała 5 musi przyjaźnić się z Jackiem oraz osobą, której odpowiedzią jest 4. Wynika z tego, że osoba, której odpowiedzią jest 4 nie przyjaźni się z Jackiem. Zatem Jacek przyjaźni się z 4 osobami w tym pokoju.

**8.** W roku nieprzestępnym jest $365 = 52 \cdot 7 + 1$ dni, więc pierwszy dzień tygodnia występuje 53 razy, a pozostałe dni tygodnia 52 razy. Zatem rok, o którym mowa w zadaniu, musi być przestępny i mieć $366 = 52 \cdot 7 + 2$ dni. W szczególności dwa pierwsze dni tygodnia w roku wystąpią jeden raz więcej niż pozostałe, więc pierwszym dniem tygodnia jest wtorek.

**9.** Łącznie po dniu i nocy Pius jest $15 - 7 = 8$ kilometrów dalej w górę rzeki. W ostatnim dniu może pokonać 15 kilometrów. Zatem rano ostatniego dnia musi być co najmniej na 85. kilometrze.

Potrzebuje zatem $\lceil 85/8 \rceil = 11$ cykli dzień-noc oraz ostatniego dnia, by dotrzeć do celu. Ostatnim dniem podróży będzie dzień 12.

**10.** Mamy $\sphericalangle BPA = 180° - \sphericalangle BPC = 60°$. Zatem $\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle CBA - \sphericalangle BCA = 70°$. Skąd, skoro $ABC$ jest równoramienny, to $\sphericalangle CBA = \frac{180° - \sphericalangle CAB}{2} = 55°$. Zatem $\sphericalangle PBA = \sphericalangle CBA - \sphericalangle PBA = 5°$.