Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

Eliminacje (klasy 7-8 SP)

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których $3p+1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, którego przekątne przecinają się w punkcie S. Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do AB, która przecina ramiona AD, BC trapezu w punktach odpowiednio E i F. Udowodnij, że $|ES| = |SF|$.

3. Czy liczby naturalne od 1 do 33 da się podzielić na 11 trójek tak, by w każdej trójce największa liczba była sumą dwóch pozostałych?

4. Na tablicy napisano ciąg $202620266202666\ldots202$ (liczba szóstek pomiędzy podciągami postaci 202 zwiększa się za każdym razem o 1, ciąg kończy się ciągiem cyfr 202). Ile wynosi suma cyfr napisanych na tablicy, jeżeli wiadomo, że napisano 168 cyfr?

5. Asia, Basia, Cesia i Daria dzielą między sobą N monet w taki sposób, że liczba monet otrzymana przez każdą z osób jest liczbą całkowitą. Dodatkowo liczba monet Asi jest równa jednej trzeciej łącznej liczby monet pozostałych, liczba monet Basi jest równa jednej piątej łącznej liczby monet pozostałych, a liczba monet Cesi jest równa jednej siódmej łącznej liczby monet pozostałych. Jaka jest największa możliwa wartość N jeżeli wiemy, że $N < 100$?

6. Udowodnij, że jeżeli $c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab}$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c to c jest podzielne przez 3.

7. Ile wspólnych dzielników mają liczby 999999999 oraz 9999999999 (cyfra 9 powtórzona odpowiednio 9 i 10 razy)?

8. Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 17?

9. Udowodnij, że jeśli w trójkącie ABC wysokość i środkowa poprowadzone z punktu A są tym samym odcinkiem, to $|AB| = |AC|$.

10. Trójkąt ABC ma pole 16. Punkty A', B', C' są środkami odpowiednio boków BC, CA, AB. Jakie jest pole trójkąta $A'B'C'$?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2025/26

Rozwiązania zadań (klasy 7-8 SP)

1. Jedyną taką liczbą pierwszą jest 5. Chcemy bowiem znaleźć wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje a, takie że $3p + 1 = a^2$, czyli $3p = (a + 1)(a - 1)$. Z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wiemy, że mamy tylko następujące przypadki:

- $3 = a + 1, p = a - 1$, lecz wówczas $p = 1$. Sprzeczność.
- $3 = a - 1, p = a + 1$, wtedy $p = 5$.
- $1 = a + 1, 3p = a - 1$, wtedy również otrzymujemy sprzeczność.
- $1 = a - 1, 3p = a + 1$, ponownie $p = 1$, co jest niemożliwe.

Dla $p = 5$, $3p + 1 = 16 = 4^2$, co kończy rozwiązanie.

2. Dorysujmy wysokość trapezu DK, która przecina ES w punkcie M, oraz wysokość CL, która przecina SF w punkcie N. Trójkąty DES i DAB są podobne, a zatem mamy:

$$\frac{|ES|}{|DM|} = \frac{|AB|}{|DK|},$$

czyli

$$|ES| = \frac{|AB|}{|DK|}|DM|$$

Podobnie z podobieństwa CSF i CAB otrzymujemy

$$|SF| = \frac{|AB|}{|CL|}|CN|$$

Ponieważ EF jest równoległe do AB, a DK, CL to wysokości to mamy $\frac{|CN|}{|CL|} = \frac{|DM|}{|DK|}$. Istotnie więc $|ES| = |SF|$.

3. Jest to niewykonalne. Weźmy pod lupę jedną z takich trójek: a, b, c. Załóżmy, że $c = a + b$. Wówczas $a + b + c = 2c$. Oznacza to, że suma wszystkich liczb we wszystkich trójkach musiałaby być parzysta. Jednakże suma liczb od 1 do 33 nie jest parzysta, gdyż jest równa

$$\frac{34 \cdot 33}{2} = 17 \cdot 33$$

.

4. Niech k oznacza liczbę wystąpień podsłowa 2026 na tablicy, wtedy podsłowo 202 występuje $k + 1$ razy (jeden dodatkowy raz na końcu). Liczba szóstek wynosi $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, liczba zer to $k + 1$, a dwójek to $2(k + 1)$. Zatem na tablicy napisano $3k + 3 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+7k+6}{2} = 168 = \frac{15^2+7\cdot 15+6}{2}$ cyfr. Wynika z tego, że napisano 32 dwójek, 16 zer i 120 szóstek, więc suma cyfr wynosi $2 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 6 \cdot 120 = 784$.

5. Oznaczmy przez A, B, C, D liczby monet Asi, Basi, Cesi i Darii odpowiednio. Z warunków w treści wiemy, że $3A = B + C + D$, $5B = A + C + D$, $7C = A + B + D$, $N = A + B + C + D$. Przekształcając pierwsze trzy równości otrzymujemy $N = 4A = 6B = 8C$, co jest równoważne z podzielnością N przez 24. Największa wielokrotność 24 mniejsza od 100 to 96 i faktycznie $A = 24, B = 16, C = 12, D = 44$ działają.

6. Pomnóżmy obie strony równania przez ab: $abc = a^2 + b^2 + 1$. Jeżeli a jest podzielne przez 3 to lewa strona jest podzielna przez 3, a reszta z dzielenia przez 3 prawej strony jest równa 1 albo 2. Zatem a nie może być podzielne przez 3. Sytuacja jest symetryczna dla b więc ono też nie może być podzielne przez 3. Ponieważ a oraz b nie są podzielne przez 3 to reszty z dzielenia przez 3 liczb a^2 i b^2 są równe 1, więc prawa strona jest podzielna przez 3. Wynika z tego, że lewa strona też jest podzielna przez 3 pomimo tego, że a oraz b nie są, co jest możliwe tylko gdy c jest podzielne przez 3.

7. Wspólne dzielniki dwóch liczb to dzielniki ich NWD. Obliczamy z algorytmu Euklidesa

$$\mathrm{nwd}(999999999, 10 \cdot 999999999 + 9) = \mathrm{nwd}(999999999, 9) = 9 \cdot \mathrm{nwd}(111111111, 1) = 9 \cdot 1 = 9,$$

więc podane w zadaniu liczby mają trzy wspólne dzielniki: $1, 3, 9$.

8. Łatwo sprawdzić (badając 10000 i kilkanaście następnych liczb), że pierwszą taką liczbą jest 10013. Analogicznie, ostatnią jest 99994. Zatem wszystkich liczb z zadania jest

$$\frac{99994 - 10013}{17} + 1 = 5294.$$

9. Niech M - środek odcinka BC. Z tw. Pitagorasa w trójkątach AMB i AMC

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 = |AM|^2 + |CM|^2 = |AC|^2,$$

więc, ponieważ długości odcinków są liczbami nieujemnymi, teza zachodzi.

10. Trójkąty ABC oraz $AC'B'$ są podobne z cechy kbk. Ponieważ B', C' są środkami boków, skala tego podobieństwa wynosi $1/2$, a pole $AC'B'$ to $16/4 = 4$. Podobnie pola pozostałych dwóch *narożnych* trójkątów wynoszą 4, więc pole $A'B'C'$ to $16 - 3 \cdot 4 = 4$.