

# Zadania

## Grafy

1. W grupie  $n$  ludzi pewne pary się znają, a pewne nie. Udowodnij że po zsumowaniu liczby znanych każdej z osób z tej grupy liczba ta będzie parzysta. Ile wynosi ta liczba? (Lemat o uściskach dłoni)
2. Ile co najmniej musi wynosić  $n$  aby na pewno w tej grupie dało się znaleźć grupę 3-osobową w której wszyscy się znają lub nikt nikogo nie zna. (Twierdzenie Ramseya)
3. Podaj liczbę krawędzi, największy i najmniejszy stopień wierzchołka dla grafów:
  - a)  $C_5, K_3, K_{3,2}$
  - b)  $C_n, K_n, K_{n,m}$
4. Dany jest graf  $G$  o  $n$  wierzchołkach,  $m$  krawędziach, najmniejszym stopniu równym  $x$  największym równym  $y$ . Podaj liczbę krawędzi, największy i najmniejszy stopień wierzchołka grafu  $\bar{G}$
5. Narysuj graf który:
  - a) ma wierzchołki o stopniach kolejno 1,2,3,4.
  - b) jest spójny, ma co najmniej 6 wierzchołków i zawiera w sobie dwa cykle.
  - c) jest spójny, dwudzielny i zawiera cykl.
  - d) ma co najmniej 8 wierzchołków, jest spójny i nie zawiera cyklu.
6. Udowodnij że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta.
7. Jaka średnicę ma  $C_n$ ?
8. Jaka jest maksymalna liczba krawędzi w grafie dwudzielnym o  $n$  wierzchołkach?
9. Udowodnij że jeśli graf jest dwudzielny to nie zawiera cyklu nieparzystej długości.
10. Udowodnij że jeśli graf nie zawiera cyklu nieparzystej długości to jest dwudzielny.
11. Udowodnij że jeśli  $G$  nie jest spójny to  $\bar{G}$  jest.
12. Udowodnij że w każdym grafie o co najmniej 2 wierzchołkach znajdziemy parę wierzchołków o tym samym stopniu. (wskazówka: zasada szufladkowa)
13. Udowodnij że dla dowolnego  $k$  istnieje graf o  $n = 4k$  oraz  $n = 4k + 1$  wierzchołkach taki że  $G$  jest równoważny  $\bar{G}$ .
14. Graf jest  $k$ -spójny jeśli da się go rozspójnić usuwając  $k$  krawędzi ale nie da się go rozspójnić usuwając  $k - 1$  krawędzi. Udowodnij że każdy wierzchołek w tym grafie ma stopień przynajmniej  $k$ .