

Zadania

Grafy

1. W grupie n ludzi pewne pary się znają, a pewne nie. Udowodnij że po zsumowaniu liczby znanych każdej z osób z tej grupy liczba ta będzie parzysta. Ile wynosi ta liczba? (Lemat o uściskach dłoni)
2. Ile co najmniej musi wynosić n aby na pewno w tej grupie dało się znaleźć grupę 3-osobową w której wszyscy się znają lub nikt nikogo nie zna. (Twierdzenie Ramseya)
3. Podaj liczbę krawędzi, największy i najmniejszy stopień wierzchołka dla grafów:
 - a) $C_5, K_3, K_{3,2}$
 - b) $C_n, K_n, K_{n,m}$
4. Dany jest graf G o n wierzchołkach, m krawędziach, najmniejszym stopniu równym x największym równym y . Podaj liczbę krawędzi, największy i najmniejszy stopień wierzchołka grafu \bar{G}
5. Narysuj graf który:
 - a) ma wierzchołki o stopniach kolejno 1,2,3,4.
 - b) jest spójny, ma co najmniej 6 wierzchołków i zawiera w sobie dwa cykle.
 - c) jest spójny, dwudzielny i zawiera cykl.
 - d) ma co najmniej 8 wierzchołków, jest spójny i nie zawiera cyklu.
6. Udowodnij że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta.
7. Jaka średnicę ma C_n ?
8. Jaka jest maksymalna liczba krawędzi w grafie dwudzielnym o n wierzchołkach?
9. Udowodnij że jeśli graf jest dwudzielny to nie zawiera cyklu nieparzystej długości.
10. Udowodnij że jeśli graf nie zawiera cyklu nieparzystej długości to jest dwudzielny.
11. Udowodnij że jeśli G nie jest spójny to \bar{G} jest.
12. Udowodnij że jeśli średnica $d(G) > 3$ to $d(\bar{G}) < 3$.
13. Udowodnij że w każdym grafie o co najmniej 2 wierzchołkach znajdziemy parę wierzchołków o tym samym stopniu. (wskazówka: zasada szufladkowa)
14. Udowodnij że dla dowolnego k istnieje graf o $n = 4k$ oraz $n = 4k + 1$ wierzchołkach taki że G jest równoważny \bar{G} .
15. Niech m będzie minimalnym stopniem wierzchołka w G . Załóżmy, że $m \geq 2$. Pokaż, że w G istnieje cykl długości co najmniej $m + 1$.
16. Graf jest k -spójny jeśli da się go rozspójnić usuwając k krawędzi ale nie da się go rozspójnić usuwając $k - 1$ krawędzi. Udowodnij że każdy wierzchołek w tym grafie ma stopień przynajmniej k .

17. Graf jest w -spójny wierzchołkowo jeśli da się go rozspójnić usuwając w wierzchołków ale nie da się go rozspójnić usuwając $w - 1$ wierzchołków. Udowodnij że dla dowolnego grafu k -spójnego i w -spójnego wierzchołkowo zachodzi $w \leq k$.
18. Udowodnij że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi mają wspólny wierzchołek.

Drzewa

1. Udowodnij że graf spójny o n wierzchołkach ma przynajmniej $n - 1$ krawędzi.
2. Udowodnij że z każdego grafu spójnego G_n jesteśmy w stanie wybrać $n - 1$ krawędzi które stworzą drzewo. Jest to drzewo spinające grafu.
3. Pokaż przykład grafu który ma więcej niż jedno drzewo spinające. Ile drzew spinających ma C_n ?
4. Udowodnij że z dowolnego grafu spójnego G , o co najmniej dwóch wierzchołkach, da się usunąć wierzchołek tak by graf G' pozostały po usunięciu wierzchołka pozostał spójny. (Wskazówka: każdy graf spójny ma drzewo spinające)
5. Pokaż że następujące zdania są równoważne:
 - a) Graf jest spójny i nie ma cykli
 - b) Graf jest spójny i usunięcie dowolnej krawędzi go rozspójnia
 - c) Dla dowolnej pary wierzchołków u, v istnieje dokładnie jedna ścieżka mająca końce w tych wierzchołkach.
6. Udowodnij że w każdym drzewie istnieje marszruta która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie dwa razy.
7. Udowodnij że w każdym grafie spójnym istnieje marszruta która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie dwa razy.