

Sztuka dowodzenia: nierówności i indukcja



Dygresja o implikacji $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
PRAWDA	FALSZ	FALSZ
FALSZ	PRAWDA	PRAWDA
FALSZ	FALSZ	PRAWDA

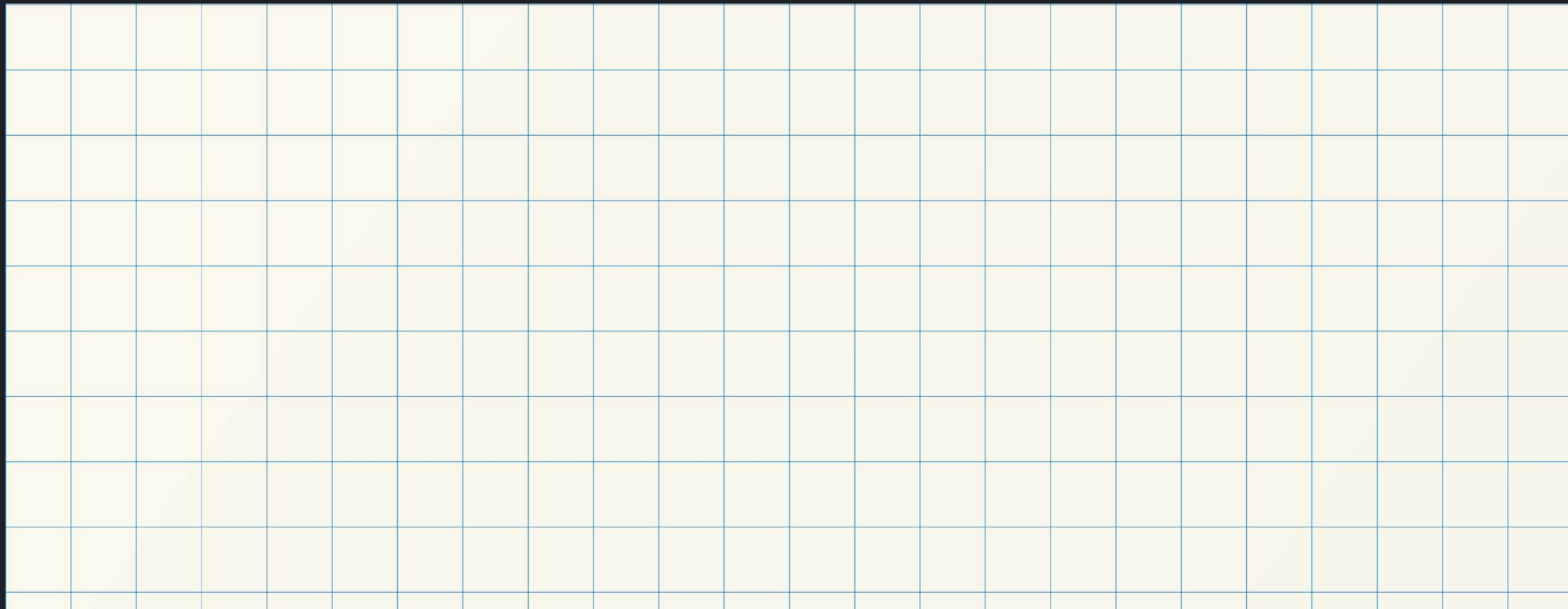
Zadanie 1: Wyznacz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 2$

b) $x < 1 \Rightarrow x^2 < 0$

c) $x^6 > 64 \Rightarrow x^7 > 128$

d) $x^5 < 32 \Rightarrow x^6 < 64$



Filary indukcji matematycznej

Wybór podstawy

Sprawdzamy $T(n_0)$.

Krok indukcyjny

Zakładamy $T(k)$ dla $k \geq n_0$
i pokazujemy $T(k+1)$.

Zastosowanie
twierdzenia o indukcji

Wnioskujemy, że $T(n)$
dla każdego $n \geq n_0$.



Dropping like dominoes



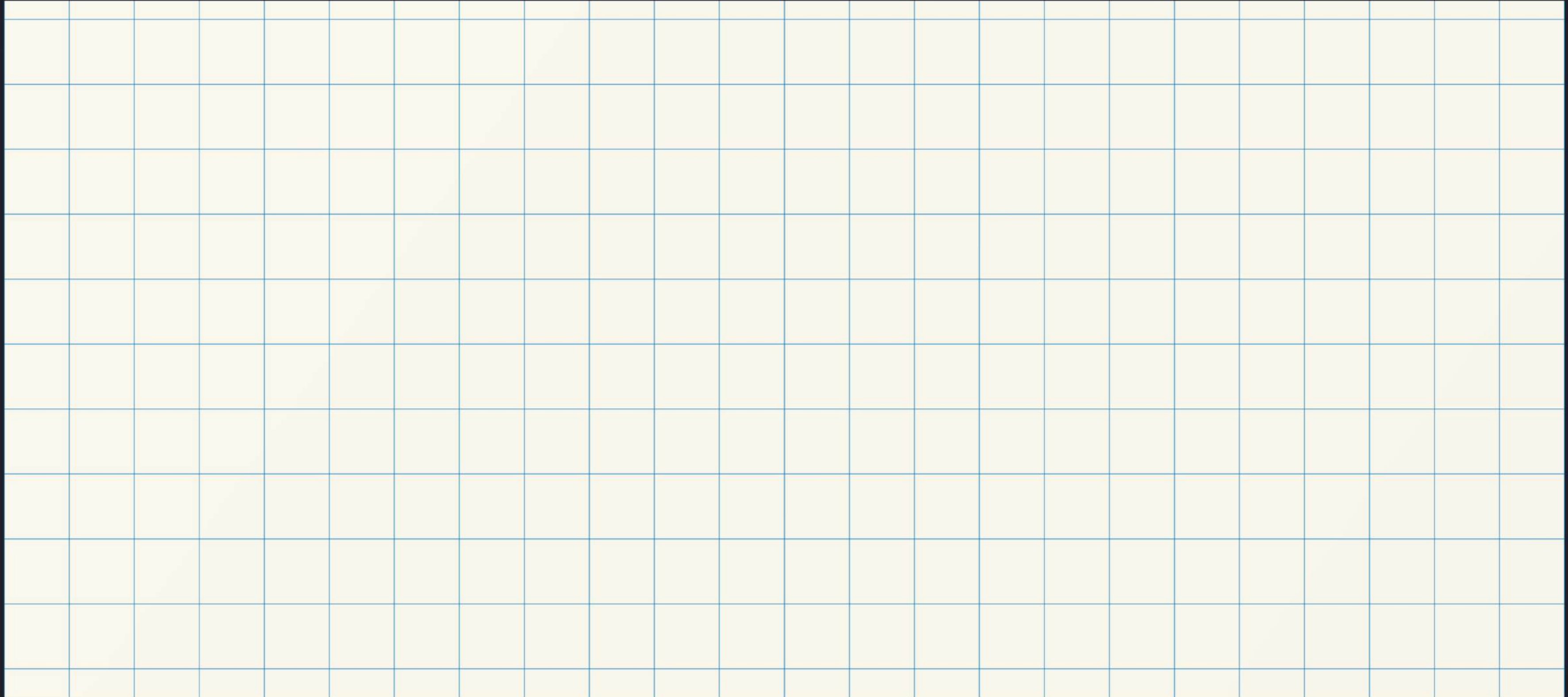
Copy link



Watch on  YouTube

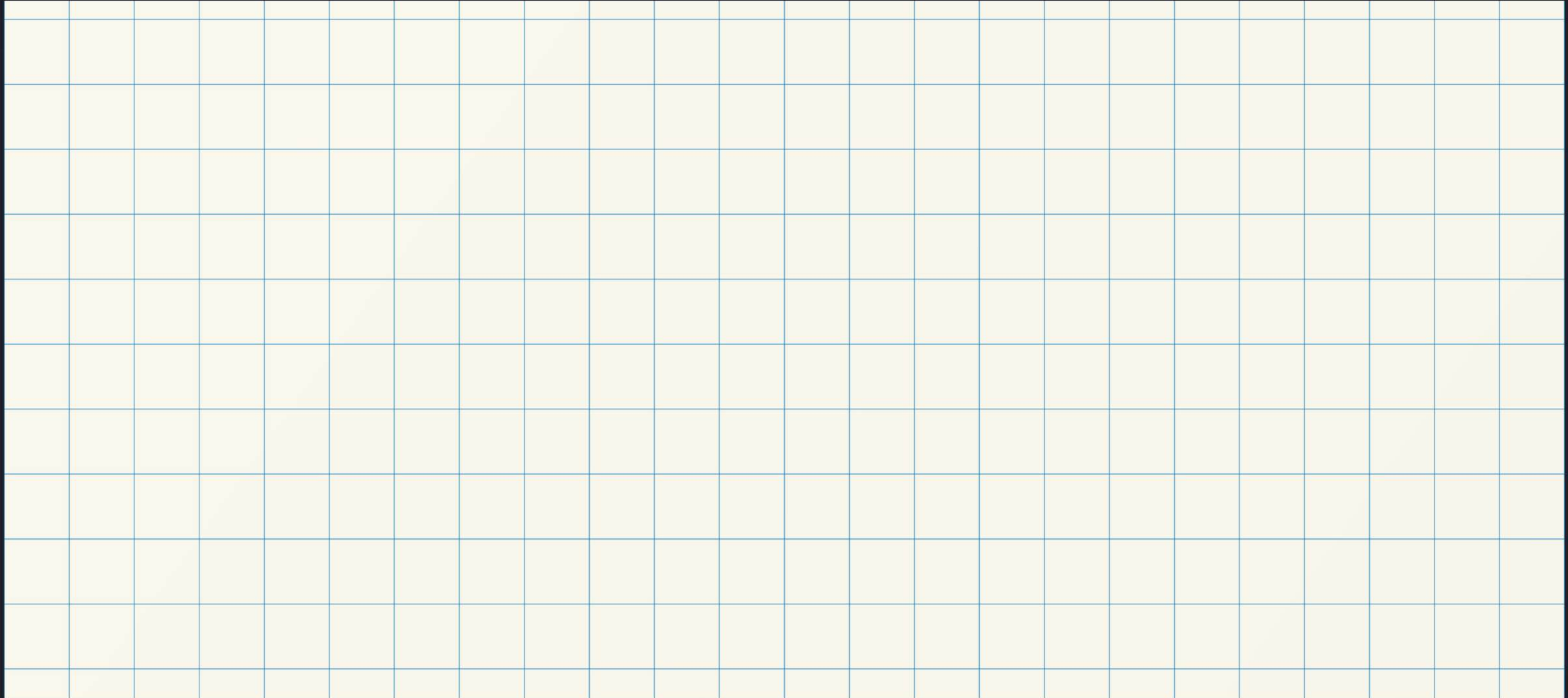
Zadanie 2: Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$1 + 2 + \dots + n \geq \frac{n^2}{2}$$



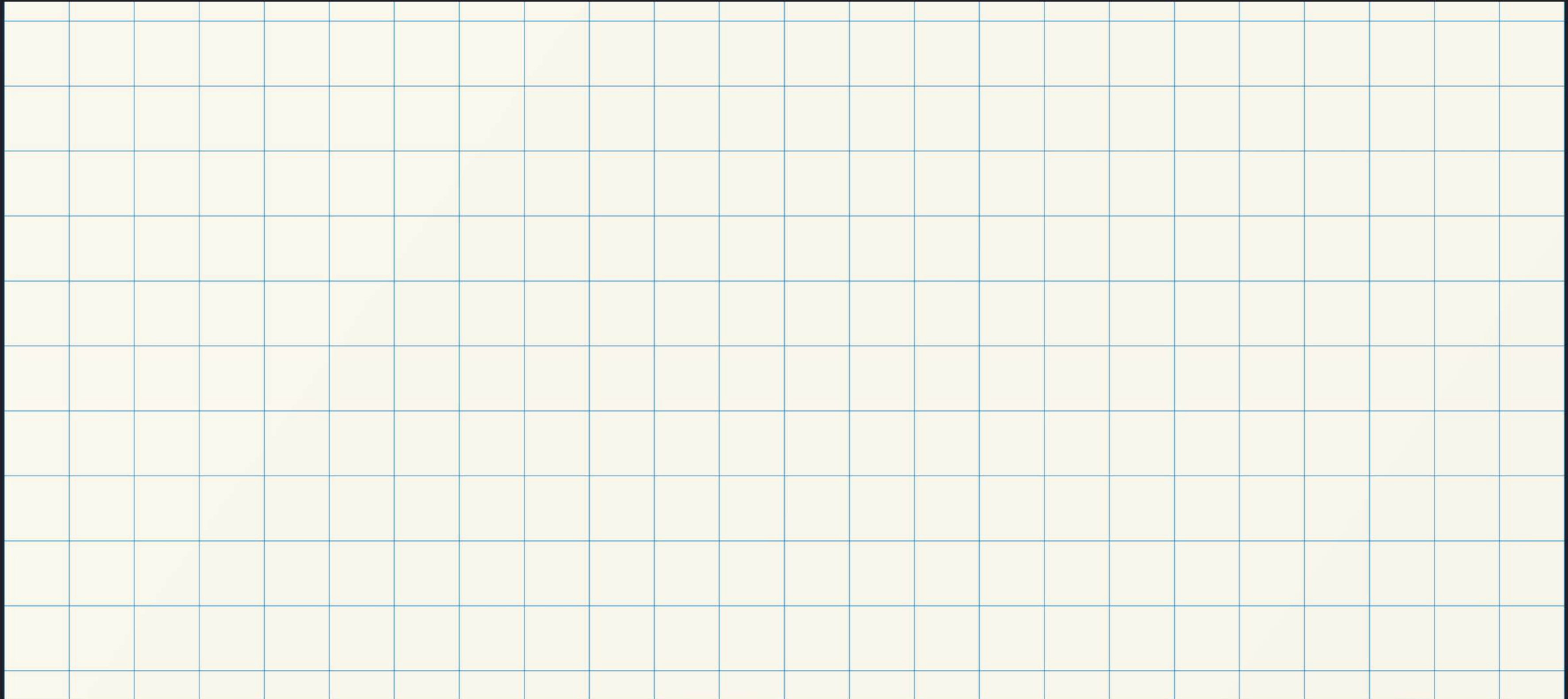
Zadanie 2: Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$30n < 2n + 110$$



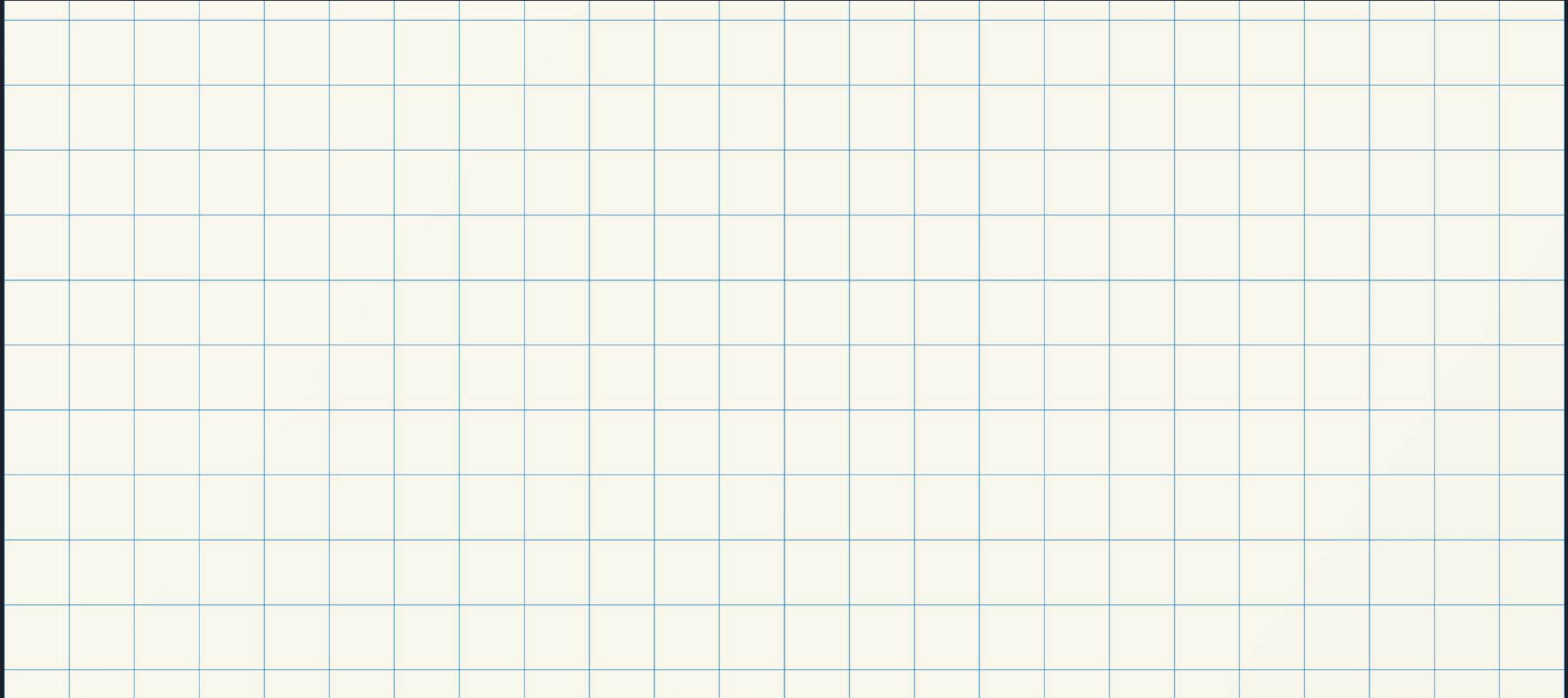
Zadanie 4: Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$3^{28} \times n \leq 3^n + 3^{31}$$



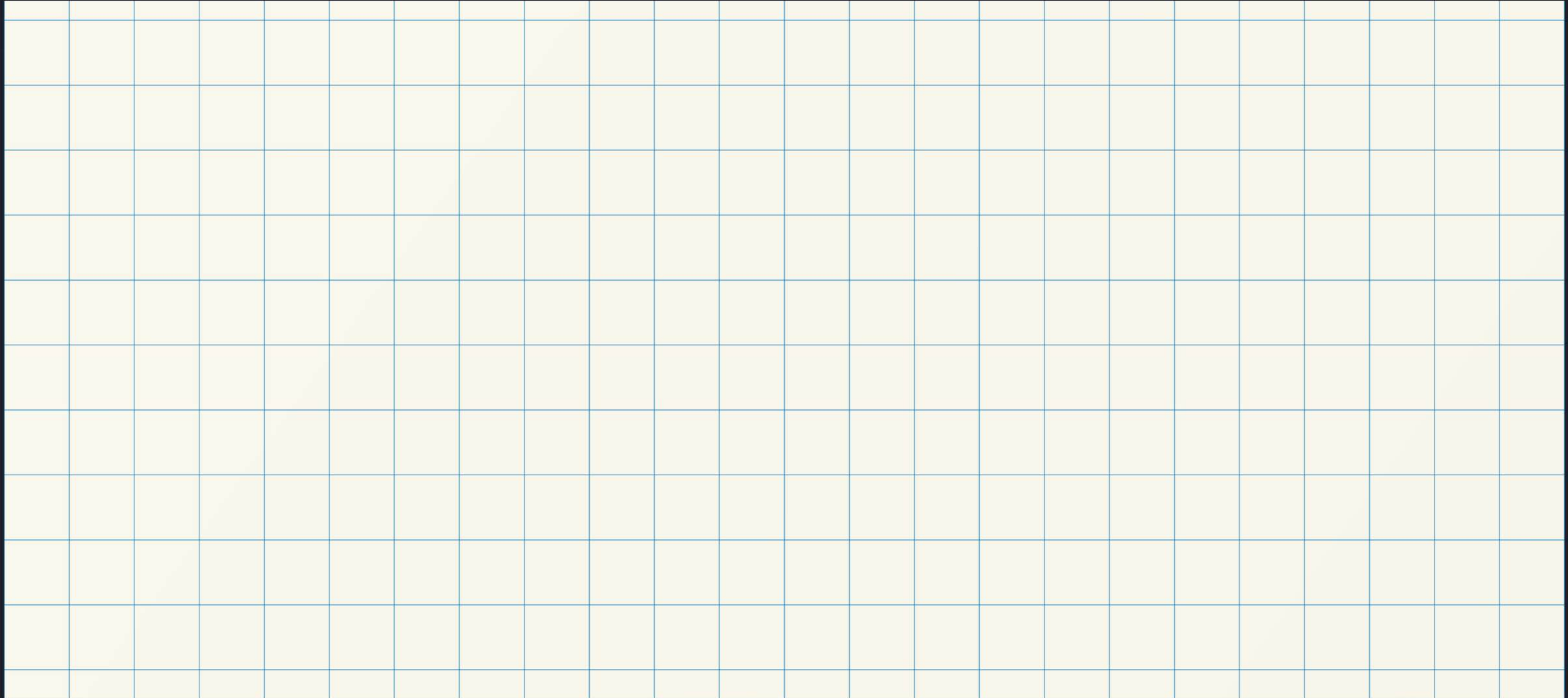
Zadanie 4: Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$2^{65} \times n \leq 2^n + 2^{71}$$



Zadanie 5: Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{10}$$



Dowód nierówności między średnimi A i G dla n liczb



$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Nowy schemat indukcyjny

Zamiast dodawać jedną liczbę, podwajamy ich ilość. Średnia 4 liczb to średnia z dwóch średnich par!

Dzięki temu łatwo dowodzimy:

$$T(2) \Rightarrow T(4)$$

$$T(4) \Rightarrow T(8)$$

$$T(8) \Rightarrow T(16)$$

Mamy dowód dla wszystkich potęg dwójki. Ale co z lukami (np. $n=3$, $n=15$)?



Reguła 2

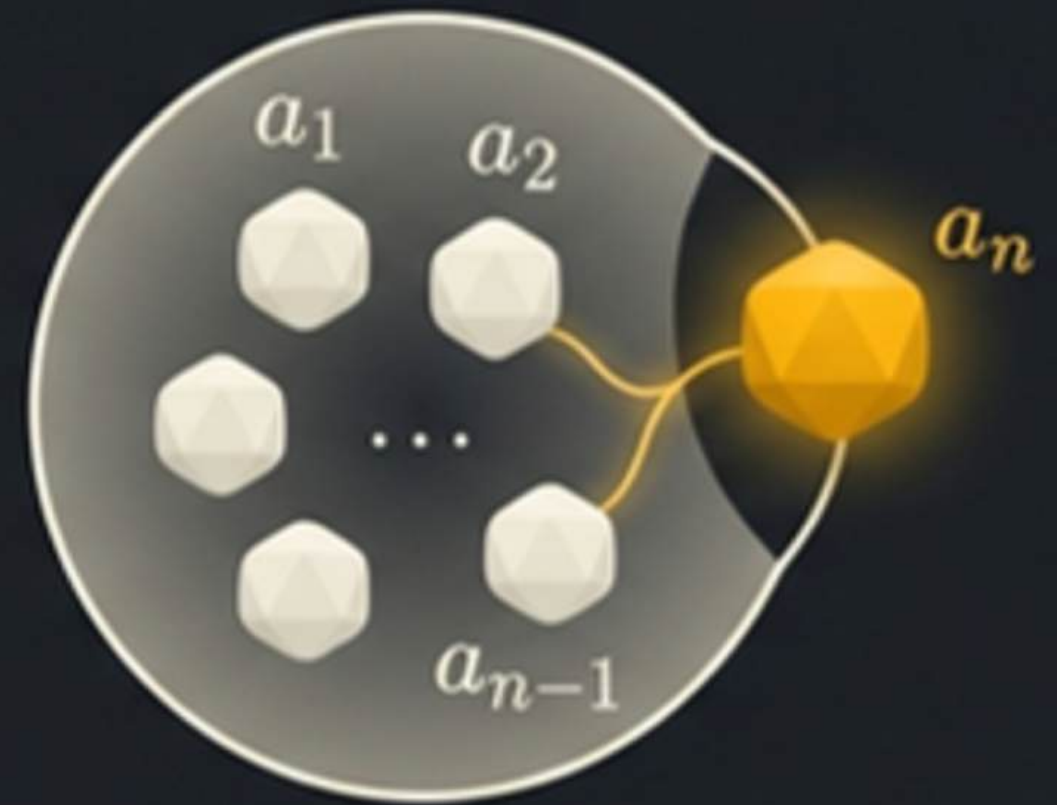
krok w tył $T(n) \Rightarrow T(n-1)$

Mamy $n-1$ liczb. Jak użyć wzoru dla n liczb?

Dokładamy brakującą n -tą liczbę tak, aby nie zmienić ogólnej średniej!

Podstawiamy $a_n = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$.

Wtedy z udowodnionego $T(n)$ wynika $T(n-1)$.



Nieskończona Gra Planszowa

Wyobraź sobie grę z nieskończoną planszą. Masz dwa ruchy:

1. Przesuń pionek z n na $2n$ (Skok do przodu).
2. Przesuń pionek z n na $n-1$ (Krok w tył).

Zaczynając od $n=1$, czy jesteś w stanie dotrzeć na każde możliwe pole?



Dwa oblicza indukcji



1. Standardowa



2. Wsteczna (Cauchy'ego)