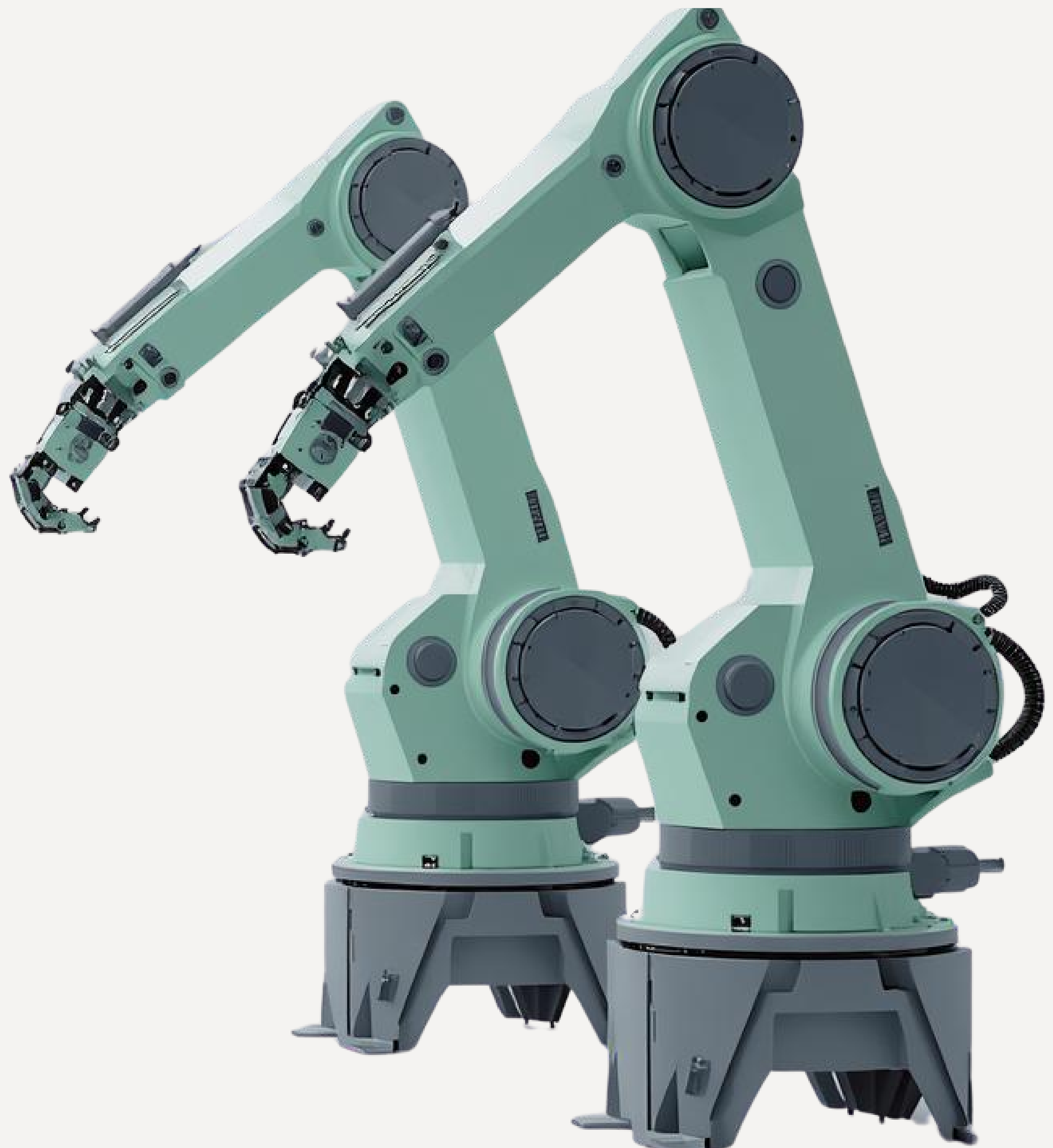


# O GEOMETRII W ROBOTYCE



XXIV Mistrzostwa Polski w Geometrii Elementarnej

**Michel Migas**

# WSTĘP

## **Manipulator**

układ techniczny przeznaczony do wykonywania niektórych czynności kończyny górnej człowieka (manipulacyjnej, wyk. palcami i wsięgnikowej, realizowanej przez ramię człowieka)

## **Robot**

urządzenie techniczne przeznaczone do wykonywania niektórych czynności manipulacyjnych i lokomocyjnych, mających odpowiedni poziom informacyjny sztucznej inteligencji i autonomizacji

## **1954**

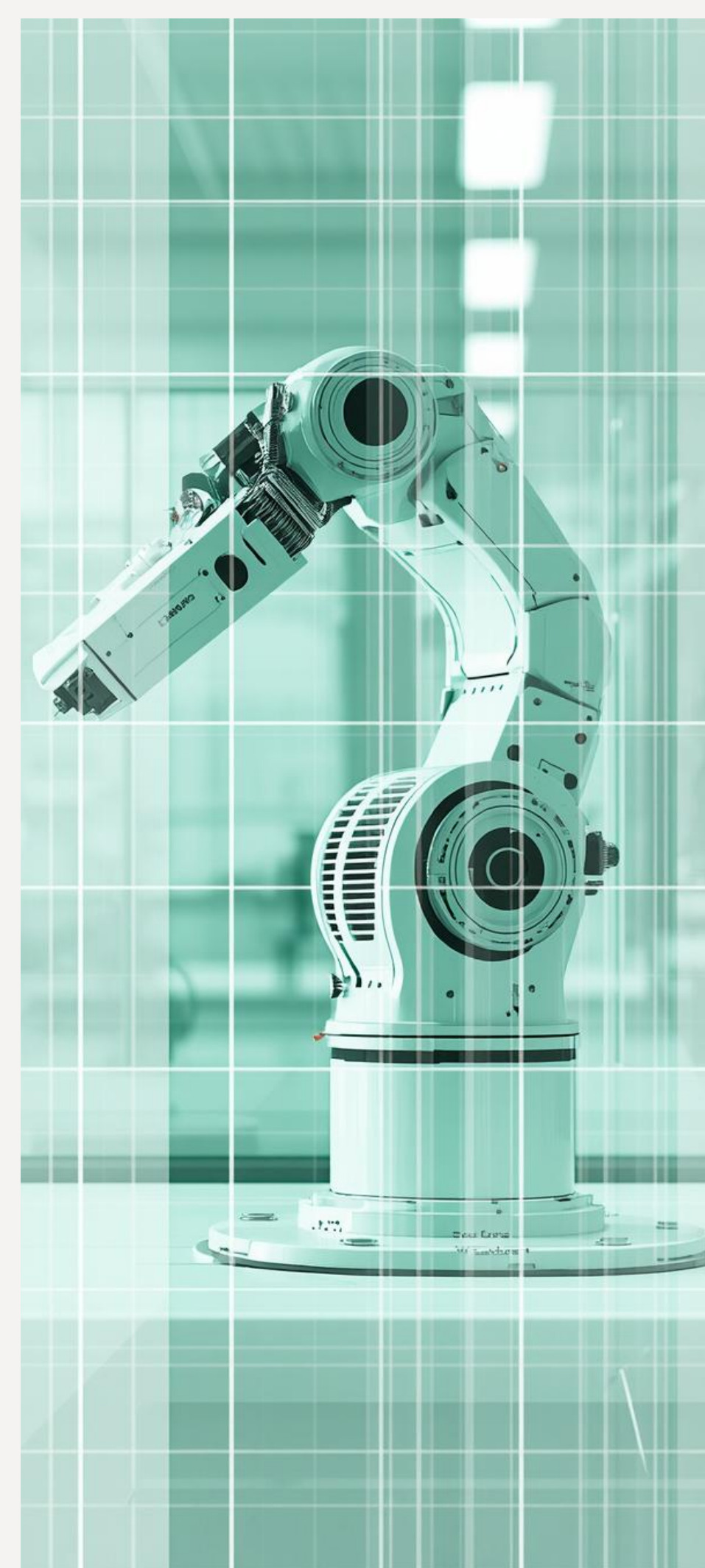
początek techniki robotyzacyjnej – USA – pierwsze manipulatory do procesów odlewniczych

## **1961**

pierwszy robot przemysłowy – USA

## **ABB, Siemens, Mitsubishi, Kawasaki**

firmy produkujące obecnie roboty



# KINEMATYKA ROBOTÓW

## Transformacje układów współrzędnych

W robotyce podstawową rolę odgrywa systematyka postępowania w zagadnieniach kinematycznych. Należy konsekwentnie przestrzegać zasad zapewniających jednoznaczną lokalizację w przestrzeni elementów manipulatora oraz obiektów znajdujących się w jego zasięgu.

Rozróżniamy tutaj:

- lokalizację bezwzględną podawaną we wspólnym dla wszystkich elementów układzie współrzędnych
- lokalizację względną, opisującą wzajemne położenia lub orientację poszczególnych elementów

Z każdym obiektem można związać układ współrzędnych (co najmniej jeden). W robotyce najczęściej przyjmuje się prawoskrętne, prostokątne układy kartezyjskie, a tylko w wyjątkowych sytuacjach układy walcowe lub kuliste.



# ZAGADNIENIE PROSTE I ODWROTNE

## Zagadnienie proste

Określenie położenia i orientacji narzędzia lub chwytaka, jeżeli są dane wszystkie zmienne złączowe.

## Zagadnienie odwrotne

Polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich współrzędnych złączowych na podstawie danych położenia narzędzia lub chwytaka manipulatora względem układu bazowego. Zagadnienie kinematyczne odwrotne jest rozwiązywalne wtedy, jeżeli istnieje algorytm pozwalający wyznaczyć WSZYSTKIE zmienne złączowe, odpowiadające danemu położeniu i orientacji danego narzędzia lub chwytaka.

---

## Rozwiązanie analityczne

Rozwiązanie dające wynik w postaci zależności opisujących wszystkie zbiory zmiennych złączowych, odpowiadające danemu położeniu i orientacji narzędzia lub chwytaka.

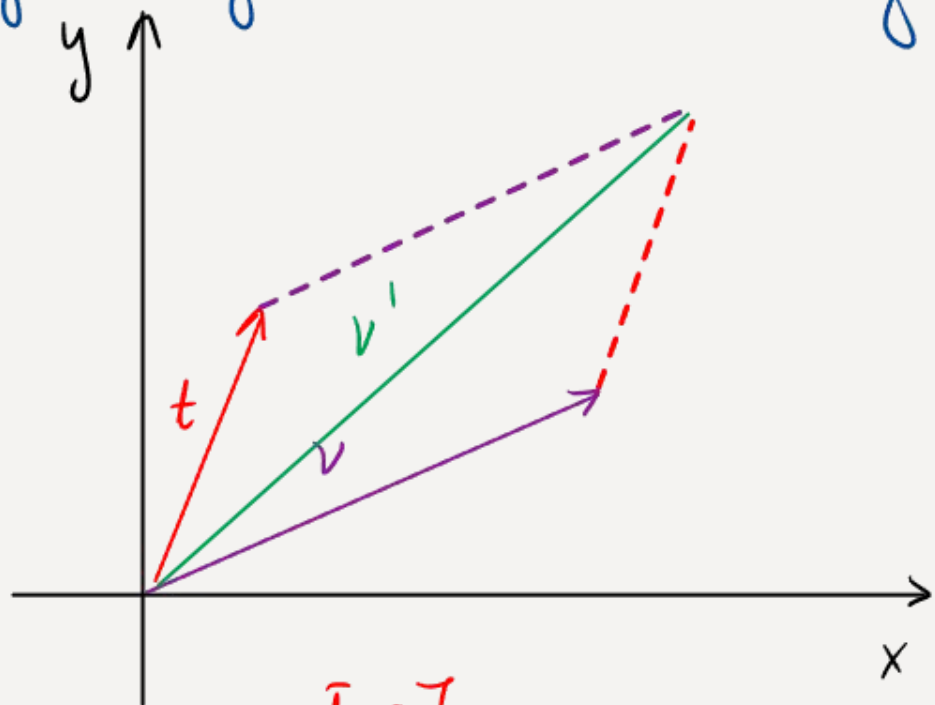
## Rozwiązanie numeryczne

Rozwiązanie dające wynik w postaci metod iteracyjnych. Ponieważ rozwiązanie numeryczne jest dłuższe, staramy się zawsze tam, gdzie jest to możliwe, znaleźć rozwiązanie analityczne.



# TRANSLACJA O WEKTOR

Mamy dany wektor  $v$  i chcemy dodać wektor  $t$ , aby otrzymać  $v'$ .



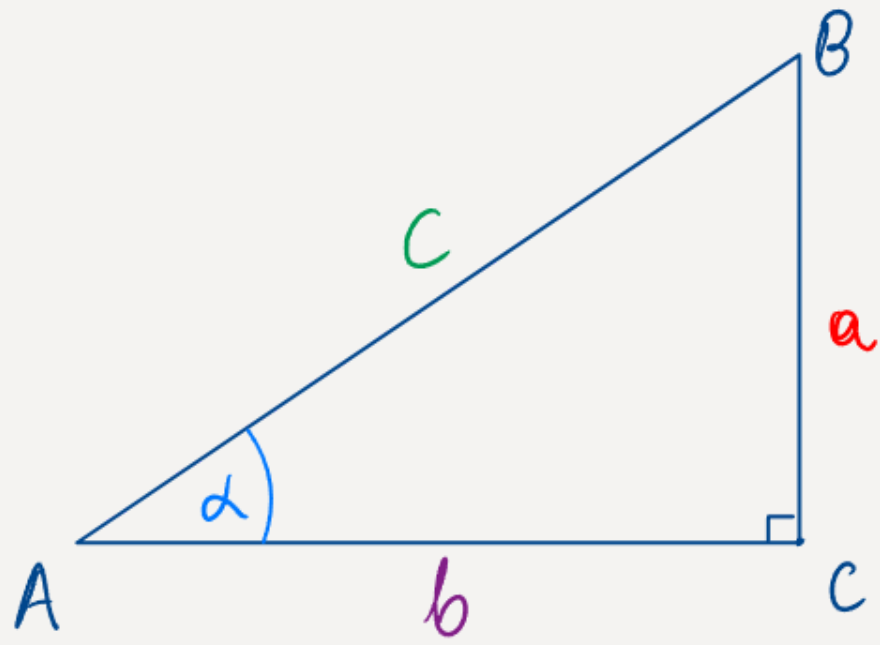
$$v' = v + t$$

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + t_x \\ v_y + t_y \end{bmatrix}$$

- Jeśli  $t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , to nic się nie dzieje.
- Translacja, czyli przesunięcie o wektor, zachowuje odległości, bo  $r'_1 - r'_2 = (r_1 + t) - (r_2 + t) = r_1 - r_2$
- Translacja przeciwna, to  $-t = \begin{bmatrix} -t_x \\ -t_y \end{bmatrix}$
- Złożenie dwóch translacji jest translacją.  $(v + t_1) + t_2 = v + (t_1 + t_2)$



# TRYGONOMETRIA SZYBKIE WPROWADZENIE



$$\sin(\alpha) := \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) := \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) := \frac{b}{c}$$

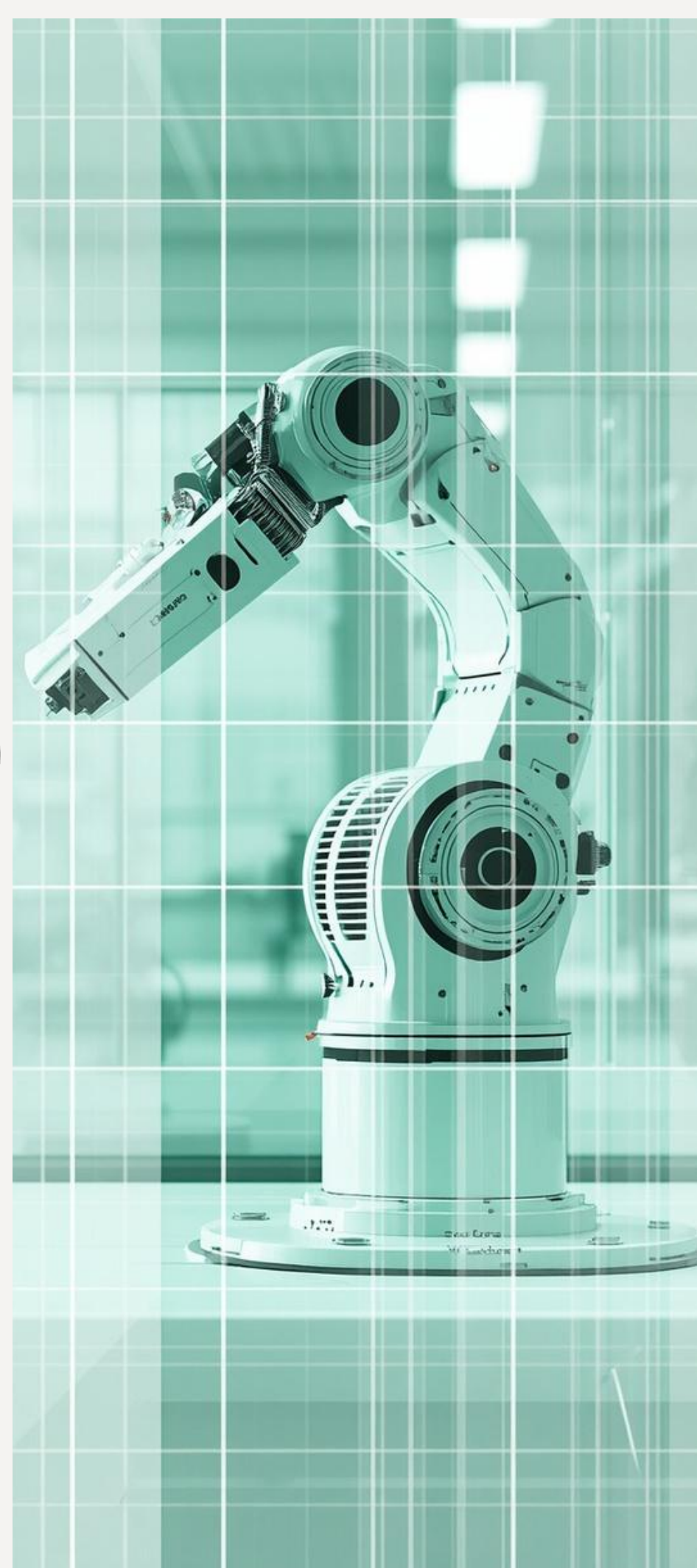
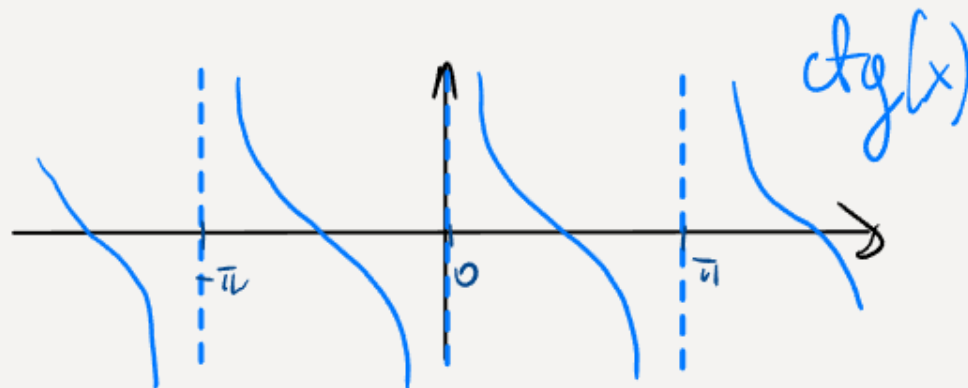
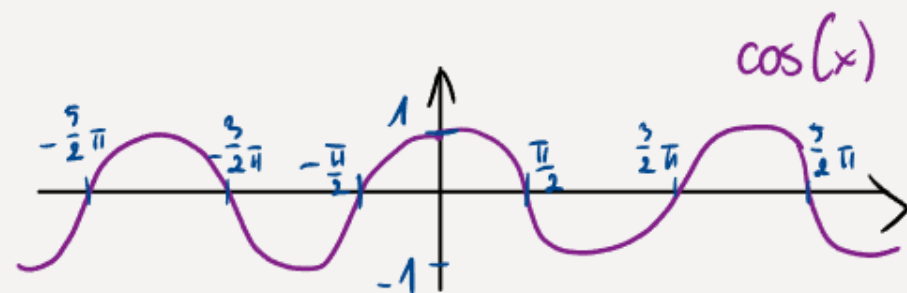
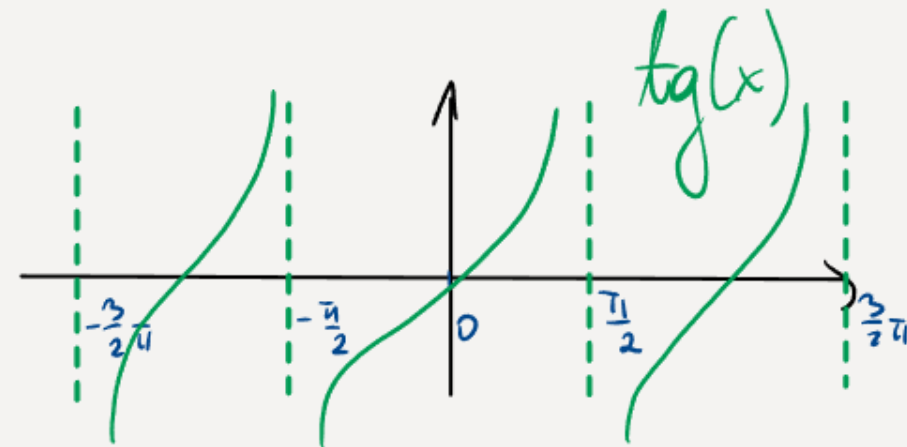
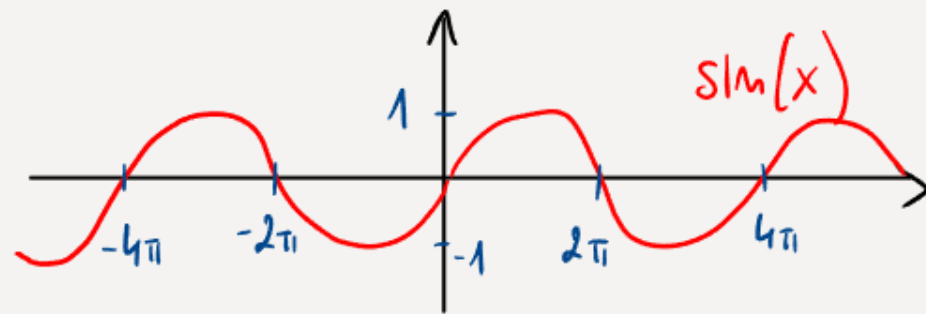
$$\operatorname{ctg}(\alpha) := \frac{b}{a}$$

Ponadto:

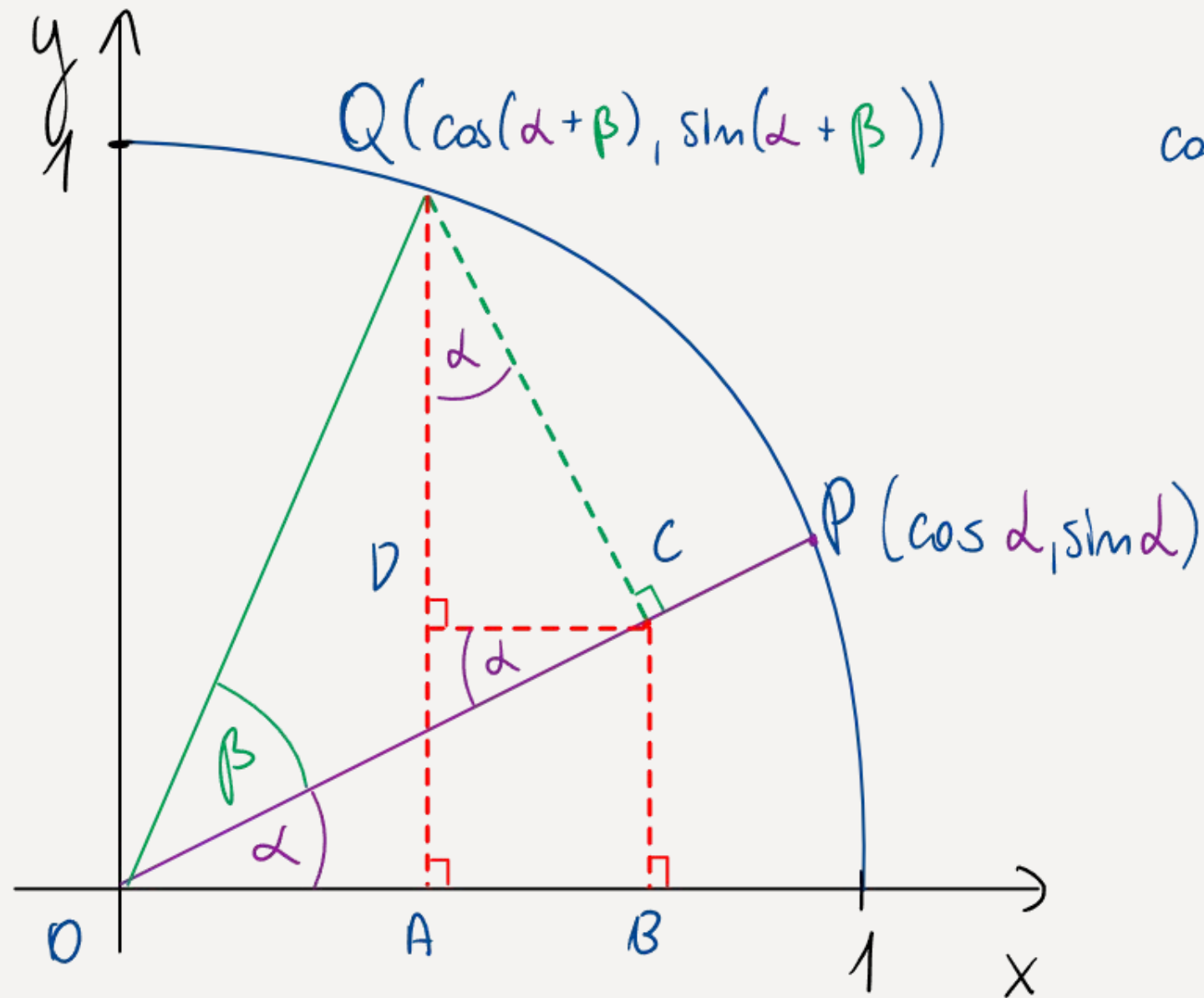
$$\rightarrow \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(jedynka trygonometryczna)

$\rightarrow \arcsin(x), \arccos(x), \dots$  - funkcje odwrotne



# SINUS | COSINUS SUMMY



$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + \beta) &= \frac{|OA|}{|OQ|} = |OA| = |OB| - |AB| \\
 &= |OB| - |CD| \\
 &= |OC| \cdot \cos \alpha - |QC| \sin \alpha \\
 &= |OQ| \cos \beta \cos \alpha - |OQ| \sin \beta \sin \alpha \\
 &= \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \frac{|QA|}{|OQ|} = |QA| = |QD| + |DA| = |QD| + |CB| = |QC| \cdot \cos \alpha + |OC| \cdot \sin \alpha \\
 &= |OQ| \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + |OQ| \cdot \cos \beta \sin \alpha = \sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha
 \end{aligned}$$



# OBRÓT W 2D

Skorzo

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha \cos\varphi + \cos\alpha \sin\varphi$$

to jeśli oznaczymy

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \text{ to możemy zdefiniować } v' = \begin{bmatrix} v_x' \\ v_y' \end{bmatrix} \text{ jako obrót } v \text{ o kąt } \varphi$$

$$v' = \begin{bmatrix} v_x' \\ v_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \varphi) \\ \sin(\alpha + \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi \\ \sin\alpha \cos\varphi + \cos\alpha \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot v_x - \sin\varphi \cdot v_y \\ \sin\varphi \cdot v_x + \cos\varphi \cdot v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

↑

Macierz obrotu w 2D



# MACIERZ OBROTU

Zauważmy, że

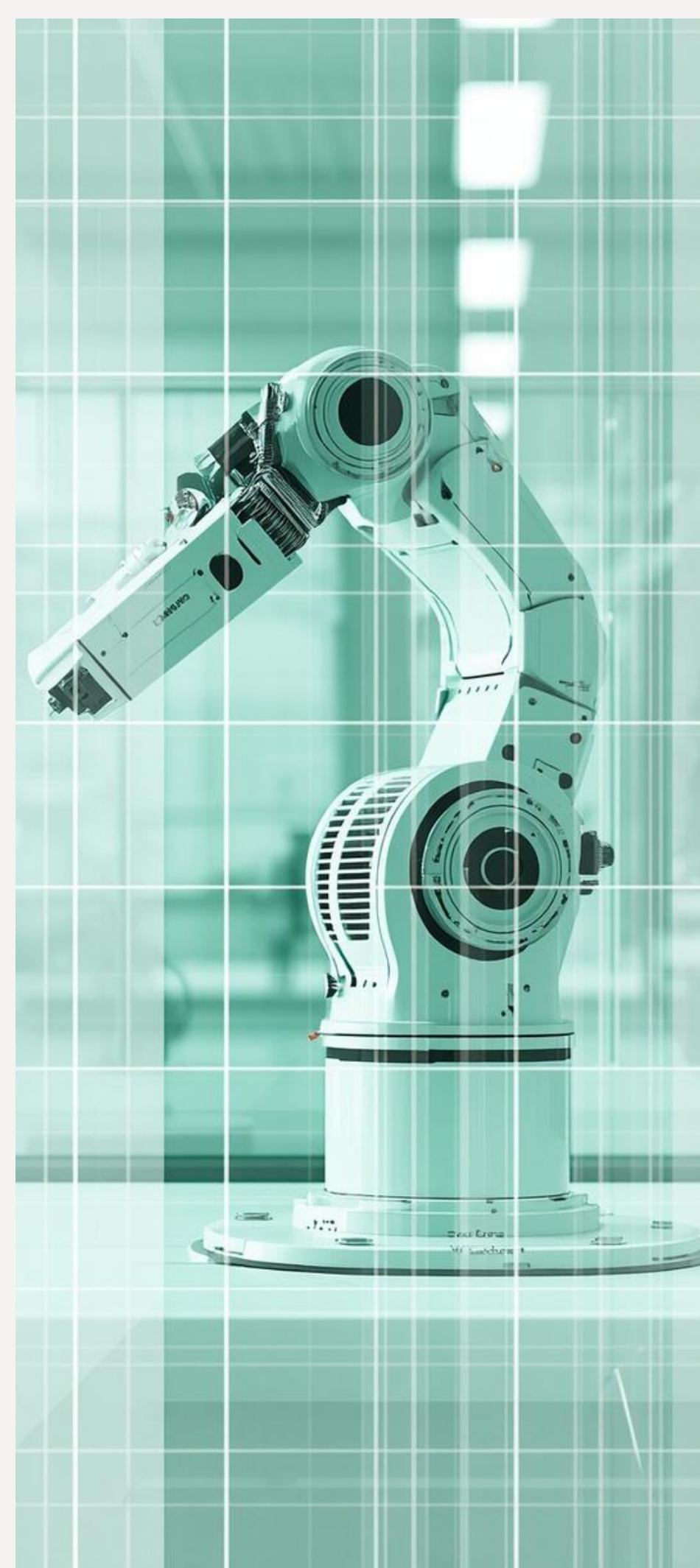
$$\det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \text{ czyli obroty zachowują odległości}$$

Innymi słowy:

$$\begin{aligned} v_x'^2 + v_y'^2 &= (v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi)^2 + (v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi)^2 \\ &= v_x^2 \cos^2 \varphi - 2v_x v_y \cos \varphi \sin \varphi + v_y^2 \sin^2 \varphi + v_x^2 \sin^2 \varphi + 2v_x v_y \cos \varphi \sin \varphi + v_y^2 \cos^2 \varphi \\ &= v_x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + v_y^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = v_x^2 + v_y^2 \end{aligned}$$

Ponadto dla  $\varphi = 0^\circ$  mamy  $\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ← macierz jednostkowa

Dla  $-\varphi$  mamy  $\begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T$  ← czyli transponowana "obrócona" macierz obrotu



# MACIERZ OBROTU

Wzrostle macierzy

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) \end{bmatrix}$$

Stąd dla  $\theta = -\phi$  otrzymujemy, że

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$



# MACIERZ OBROTU W 3D

Przechodząc na 3 wymiary możemy obracać wokół każdej osi osobno

$$\tilde{Rot}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Rot}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Rot}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trzeba uważać, bo na ogół składanie obrotów nie jest przemienne.

A co z translacją o wektor? Czy da się zrobić macierz, która ma parametry przesunięcia i po przemnożeniu przez  $v$  daje  $v+t$ ?

$$\begin{bmatrix} ? & ? & t_1 \\ ? & ? & t_2 \\ ? & ? & t_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + t_1 \\ v_y + t_2 \\ v_z + t_3 \end{bmatrix}$$



# TRANSLACJA W 3D

Trzeba dodać czwarty wymiar.

$$T_{\text{trans}}(t_1, t_2, t_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzimy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + t_1 \\ v_y + t_2 \\ v_z + t_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



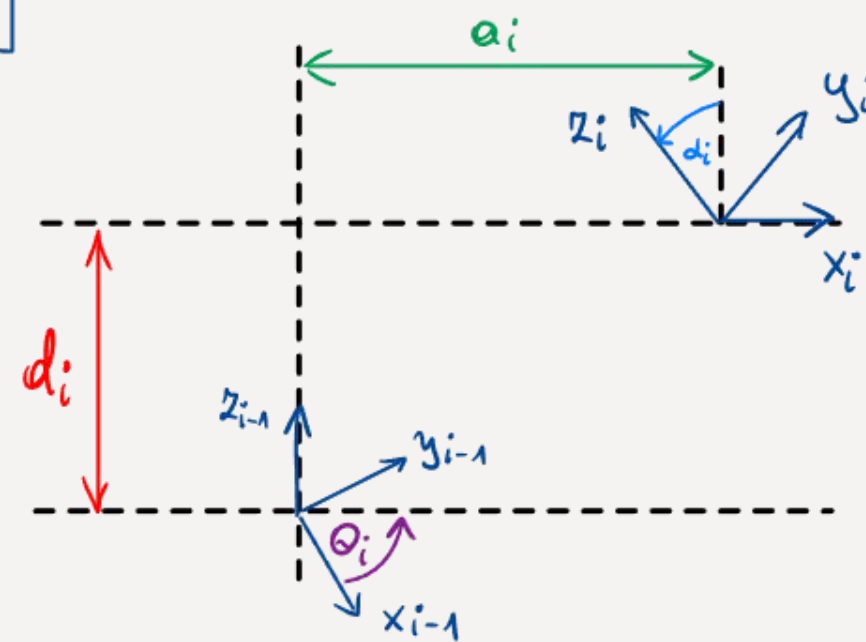
# KONWENCJA DENAVITA HARTENBERGA (DH)

Przy zastosowaniu odpowiedniej konwencji w której m.in. „forsujemy”, że np. osie  $z$  są osiami obrotu, a osie  $x$  są wzdłuż przegubu, można zaproponować jednolite przekształcenie z układu  $i-1$  do  $i$  za pomocą złożenia 4 przekształceń:

$$A_i = \text{Rot}_{z, \theta_i} \cdot \text{Trans}_{z, d_i} \cdot \text{Trans}_{x, a_i} \cdot \text{Rot}_{x, \alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

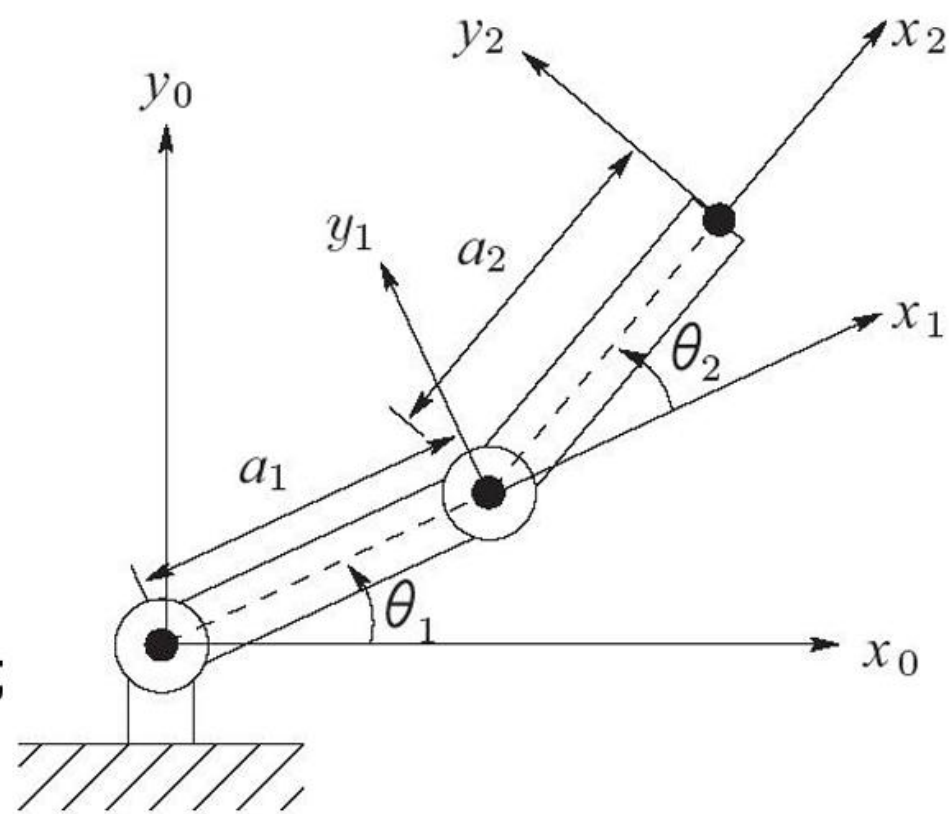


# PRZYKŁAD DH MANIPULATOR PLANARNY

- Zdefiniujmy parametry DH
  - najpierw zdefiniujmy stałe parametry  $a_i, \alpha_i$ ;
  - dalej, zdefiniujmy zmienne parametry  $\theta_i, d_i$ ;

| człon | $a_i$ | $\alpha_i$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|-------|-------|------------|-------|------------|
| 1     | $a_1$ | 0          | 0     | $\theta_1$ |
| 2     | $a_2$ | 0          | 0     | $\theta_2$ |

- $\alpha_i$  są zerowe bo wszystkie  $z_i$  są równoległe;
- Zatem tylko  $\theta_i$  są zmienne.

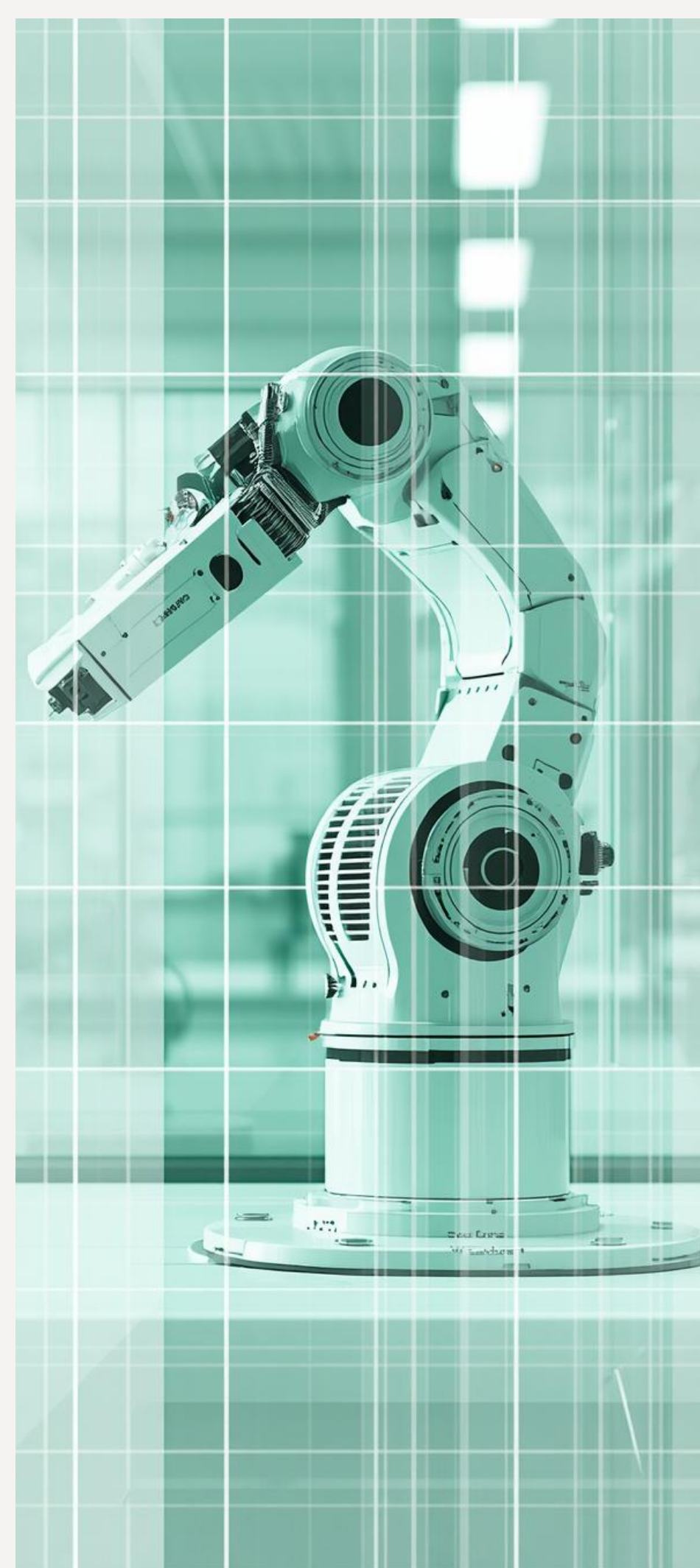


$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = A_1$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Źródło nr 3



# MANIPULATOR PLANARNY KSIĄZKOWE ROZWIĄZANIE

RACHUNKI....

$$\begin{aligned}x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\1 &= \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \\1 &= \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2\end{aligned}$$

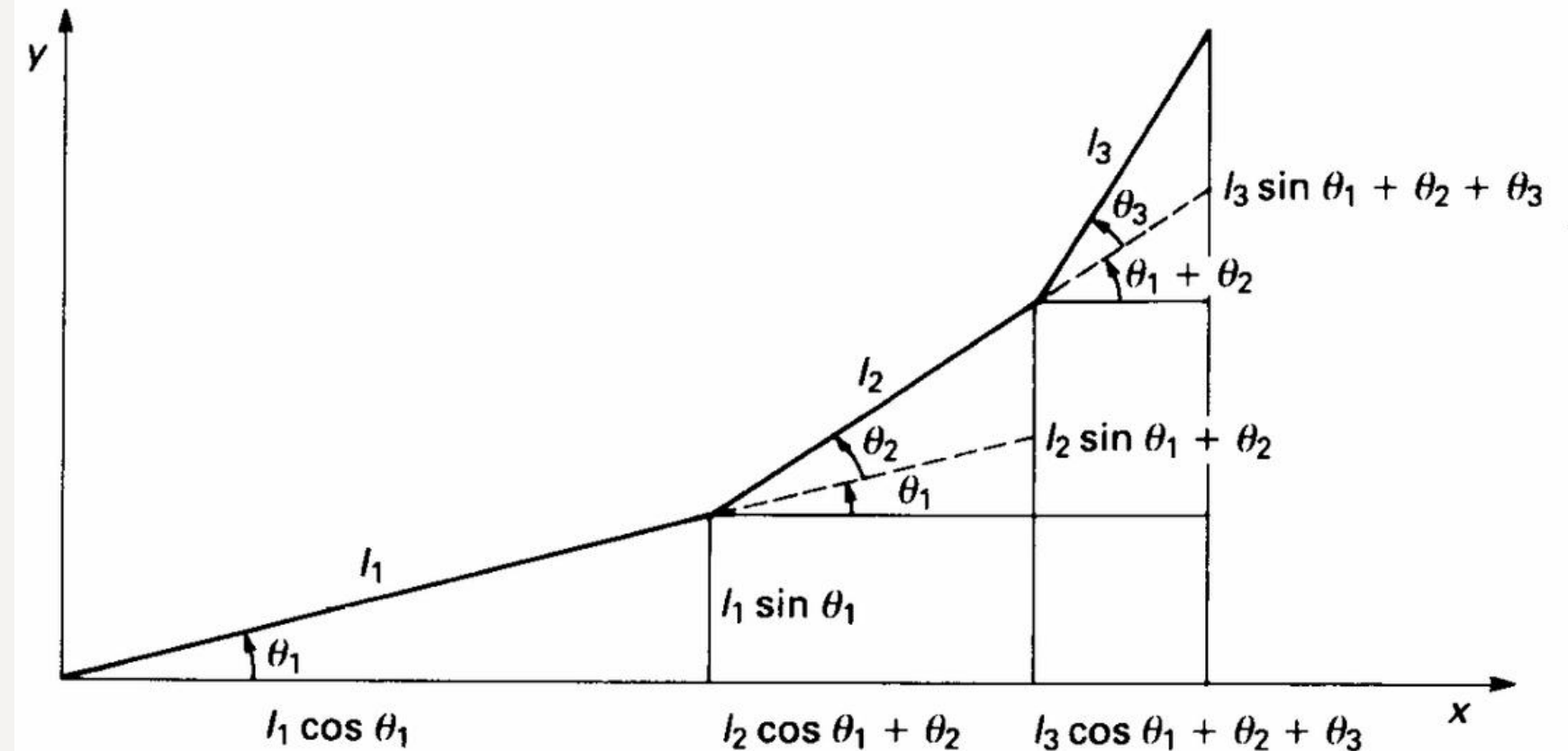
$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) &= l_1^2(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + l_2^2(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \cos^2 \theta_2 \\&\quad + l_2^2(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \sin^2 \theta_2 + 2l_1 l_2(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \cos \theta_2\end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{2l_1 l_2} \{(x^2 + y^2) - (l_1^2 + l_2^2)\} = \lambda \quad \sin \theta_2 = \pm(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}(A) \cos \theta_1 + (B) \sin \theta_1 &\equiv x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 = l_1 + l_2 \cos \theta_2 \\&= l_1 + l_2 \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(A) \sin \theta_1 + (B) \cos \theta_1 &\equiv -x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1 = l_2 \sin \theta_2 \\&= \pm l_2 (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$



$$\cos \theta_1 = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \{x(l_1 + l_2 \lambda) \pm y l_2 (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \{\mp x l_2 (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} + y(l_1 + l_2 \lambda)\}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{2l_1 l_2} \{(x^2 + y^2) - (l_1^2 + l_2^2)\} = \lambda$$

$$\sin \theta_2 = \pm(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

# MANIPULATOR PLANARNY WERSJA Z WYKŁADU

TU TEŻ RACHUNKI...

$$\begin{cases} \cos\phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & (2.55) \\ \sin\phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & (2.56) \\ x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & (2.57) \\ y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & (2.58) \end{cases}$$

Podnosimy do kwadratu równania (2.57) i (2.58) i następnie dodajemy je stronami. Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l_1^2 \cos^2\theta_1 + l_1^2 \sin^2\theta_1 + l_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + l_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + 2l_1l_2 \cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \\ &\quad + 2l_1l_2 \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2[\cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos\theta_2$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (2.59)$$

$$\text{gdzie } \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \in [-1, 1]$$

$$\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2} \quad (2.60)$$

$$\theta_2 = \arctg2(\sin\theta_2, \cos\theta_2) \quad (2.61)$$

Z (2.67) i (2.58) otrzymujemy

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$x = \cos\theta_1(l_1 + l_2 \cos\theta_2) - \sin\theta_1 l_2 \sin\theta_2$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1)$$

$$y = \sin\theta_1(l_1 + l_2 \cos\theta_2) + \cos\theta_1 l_2 \sin\theta_2$$

$$l_1 + l_2 \cos\theta_2 = k_1 \quad ; \quad l_2 \sin\theta_2 = k_2$$

$$x = k_1 \cos\theta_1 - k_2 \sin\theta_1$$

$$y = k_1 \sin\theta_1 + k_2 \cos\theta_1$$

Można wykazać, że istnieje taki kąt  $\gamma$ , że  $k_1 = r \cos\gamma$ ,  $k_2 = r \sin\gamma$

$$\text{, gdzie } r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\frac{x}{r} = \frac{r \cos\gamma \cos\theta_1 - r \sin\gamma \sin\theta_1}{r} = \cos(\theta_1 + \gamma)$$

$$\frac{y}{r} = \frac{r \cos\gamma \sin\theta_1 + r \sin\gamma \cos\theta_1}{r} = \sin(\theta_1 + \gamma)$$

$$\theta_1 + \gamma = \arctg2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{, stąd}$$

$$\theta_1 = \arctg2(y, x) - \gamma = \text{atg}2(y, x) - \text{atg}(k_1, k_2) \quad (2.62)$$

Z wzoru (2.55) lub (2.56) możemy zapisać, że  $\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$

$$\theta_3 = \arctg2(\sin\phi, \cos\phi) - \theta_1 - \theta_2$$

Otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego dla rozpatrywanego manipulatora, tzn. dla danych wartości  $\phi$  oraz  $x$  i  $y$ , pozwala wyznaczyć zmienne wewnętrzne  $\theta_1, \theta_2$  i  $\theta_3$ .

# LICZBY ZESPOLONE

## SZYBKIE WPROWADZENIE

Znamy wzór skróconego mnożenia:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

A czy da się tak dla  $a^2 + b^2$ ? Spróbujmy...

$$a^2 + b^2 = a^2 - \underbrace{(-1)}_{i^2} \cdot b^2 = a^2 - i^2 \cdot b^2 = (a - ib)(a + ib)$$

Da się, ale potrzebna takiej liczby  $i = \sqrt{-1}$ .

Na pewno  $i \notin \mathbb{R}$ , bo wiemy, że dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ :  $x^2 \geq 0$ .

$i$  - jednostka urojona

$b \cdot i$  - liczba urojona,  $b \in \mathbb{R}$

$z = a + bi$  - liczba zespolona w postaci algebraicznej  $a, b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$  - zbiór liczb zespolonych

$\operatorname{Re}(z) = a$  - część rzeczywista liczby zespolonej

$\operatorname{Im}(z) = b$  - część urojona liczby rzeczywistej

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych:

$$\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases}$$

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

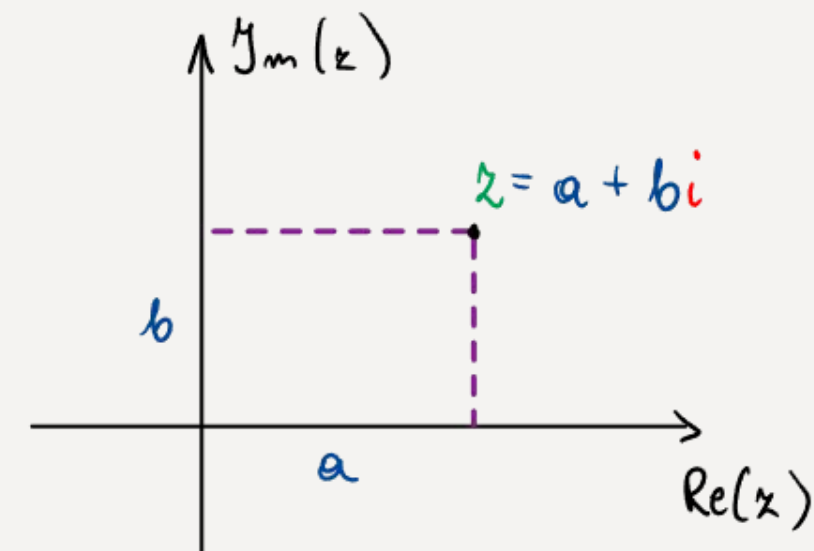
$$= ac + adi + bci + bd \cdot (-1)$$

$$= ac - bd + (ad + bc)i$$

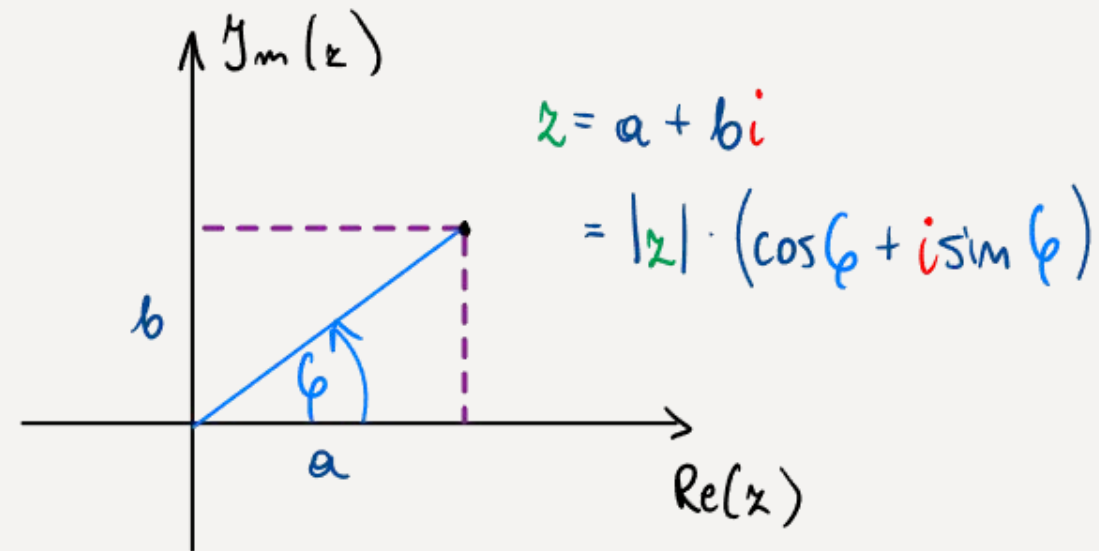
Przykład:

$$(7 + 3i) + (-8 + 2i) = -1 + 5i$$

$$(7 + 3i)(-8 + 2i) = -56 + 14i - 24i + 6i^2 = -62 - 10i$$



# LICZBY ZESPOLONE - SZYBKIE WPROWADZENIE



Rozpiszmy naszą postać algebraiczną:

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot i \right)$$

$$= |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{- postać trygonometryczna}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{- moduł liczby zespolonej}$$

$$\text{Arg}(z) = \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{- argument główny liczby zespolonej}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad \text{- postać wykładnicza liczby zespolonej}$$

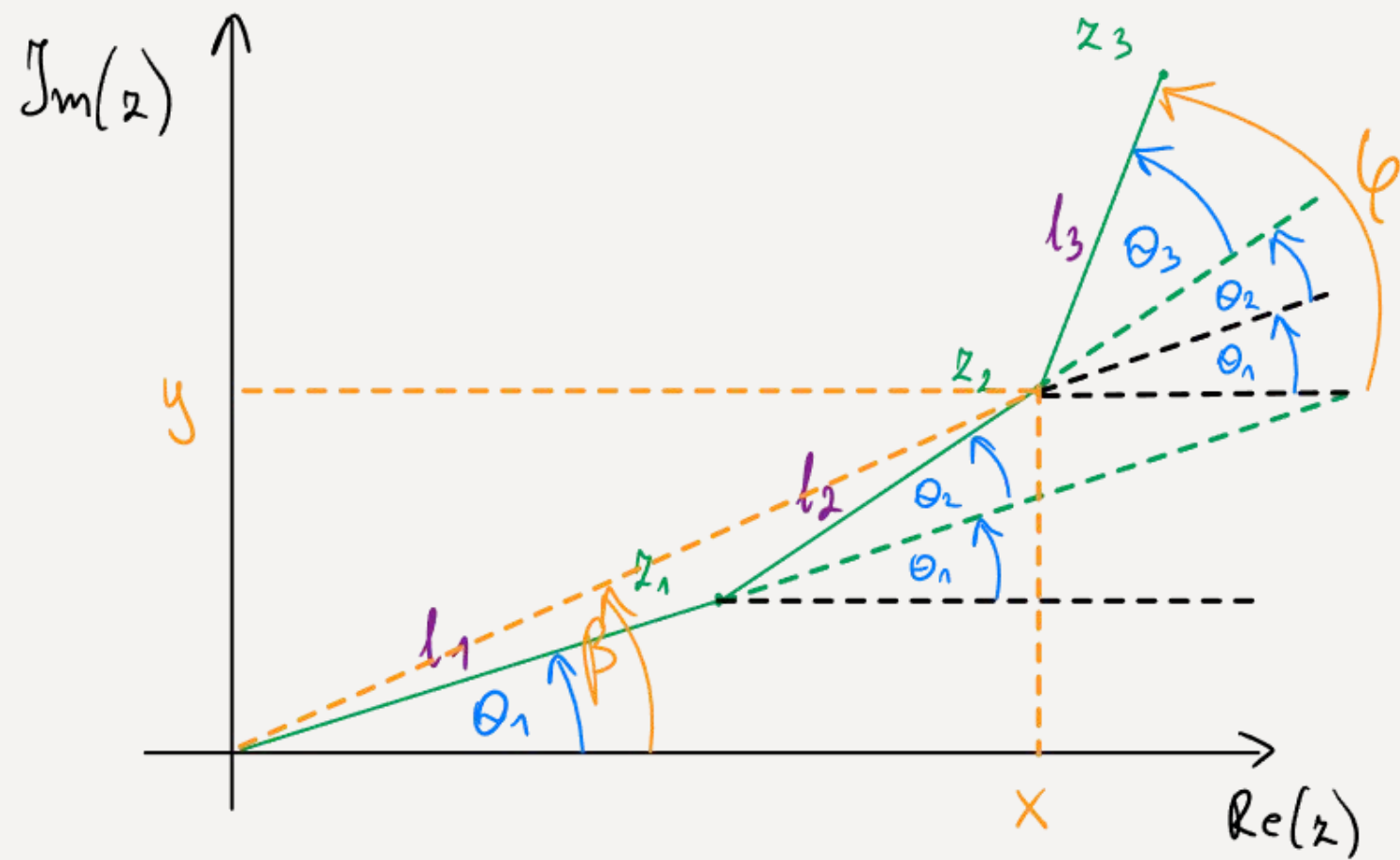
$$\bar{z} := a - bi \quad \text{- sprzężenie liczby zespolonej}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = z \bar{z}$$

Porównywanie liczb zespolonych  $\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases}$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$  i  $b = d$ , tzn. odpowiadające części rzeczywiste oraz części urojone muszą być równe

# MANIPULATOR PLANARNY AUTORSKIE ROZWIĄZANIE



$$z_1 = l_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_3 = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} + l_3 e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}$$

Mamy dany kąt  $\phi$ , czyli

$$\phi = \text{Arg}(z_3 - z_2) = \text{Arg}(l_3 e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Mamy też dane na wejściu  $z_2$ , czyli znamy

$$z_2 = R e^{i\beta}, \text{ gdzie } R = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ i } \beta = \text{Arg}(z_2) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Czyli chcemy wyznaczyć kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$ :

$$z_2 = x + iy = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Mówiliśmy, że równość liczb zespolonych, to równość odpowiednich części rzeczywistych i urojonych, ale jak tak zrobimy, to dostaniemy ten sam układ równań co wcześniej, a tego chcieliśmy uniknąć.

# MANIPULATOR PLANARNY AUTORSKIE ROZWIĄZANIE

$$z_2 = x + iy = l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Co możemy zrobić im dalej?

$$R e^{i\beta} = e^{i\theta_1} \cdot (l_1 + l_2 e^{i\theta_2}) \Rightarrow$$

$$|R e^{i\beta}| = |e^{i\theta_1}| \cdot |l_1 + l_2 e^{i\theta_2}| \Rightarrow ( )^2$$

$$R^2 = (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 + (l_2 \sin \theta_2)^2$$

$$R^2 = l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_2^2$$

$$\Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{R^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$\Rightarrow \text{mp } \theta_2 \text{ lub też } e^{i\theta_2} = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$$

Mając  $e^{i\theta_2}$  możemy teraz wyznaczyć

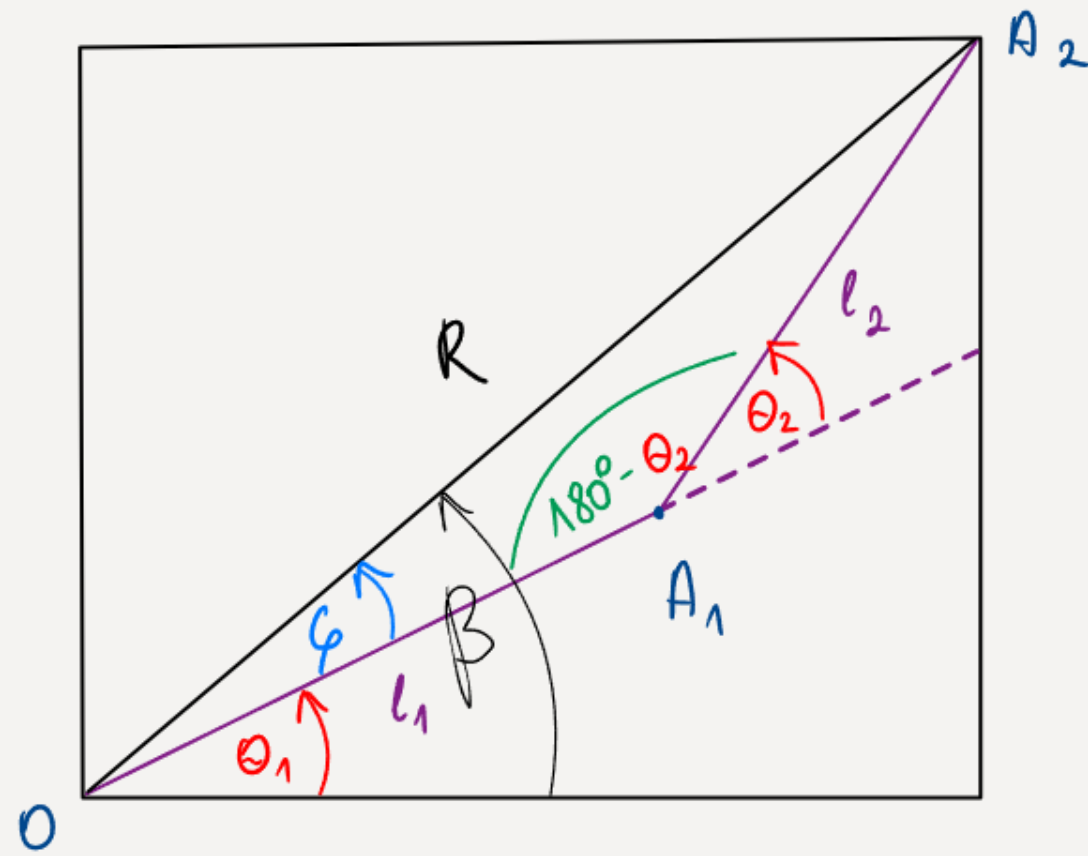
$$e^{i\theta_1} = \frac{R e^{i\beta}}{l_1 + l_2 e^{i\theta_2}}$$

= { sprowadzamy do postaci }

$$= \cos \theta_1 + i \sin \theta_1,$$

Czyli wiemy jak otrzymać kąt  $\theta_1$

# MANIPULATOR PLANARNY GEOMETRYCZNE ROZWIĄZANIE



Z tw. cosinusów dla  $\triangle OA_1A_2$  mamy:

$$R^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(180^\circ - \theta_2) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2$$

$$\Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{R^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

Z tw. sinusów dla  $\triangle OA_1A_2$ :  $\frac{l_2}{\sin \phi} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \theta_2)} = \frac{R}{\sin \theta_2} \Rightarrow \phi = \arcsin \left( \frac{l_2 \sin \theta_2}{R} \right)$

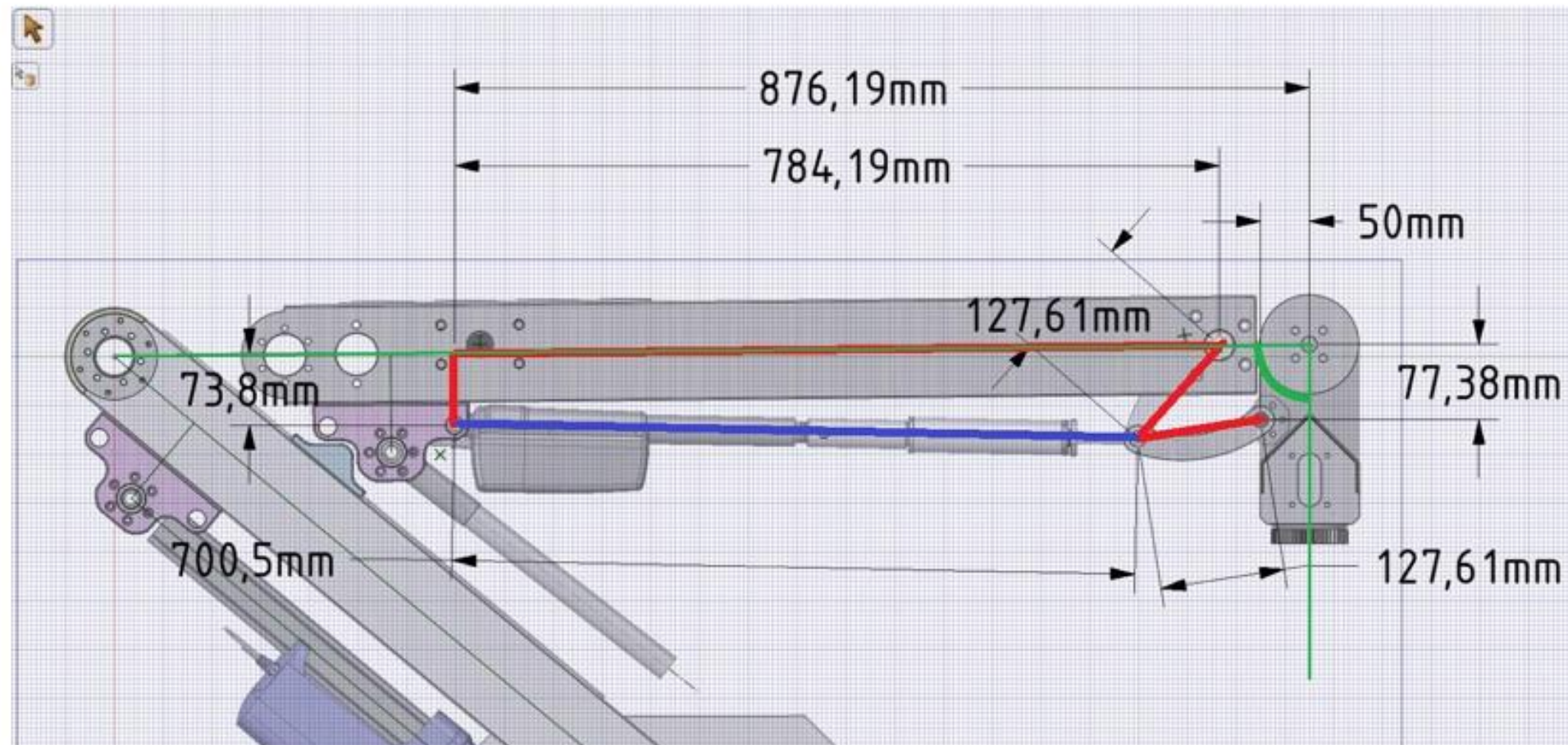
Stąd  $\theta_1 = \beta - \phi = \beta - \arcsin \left( \frac{l_2 \sin \theta_2}{R} \right)$

# PRAWDZIWIY ROBOT

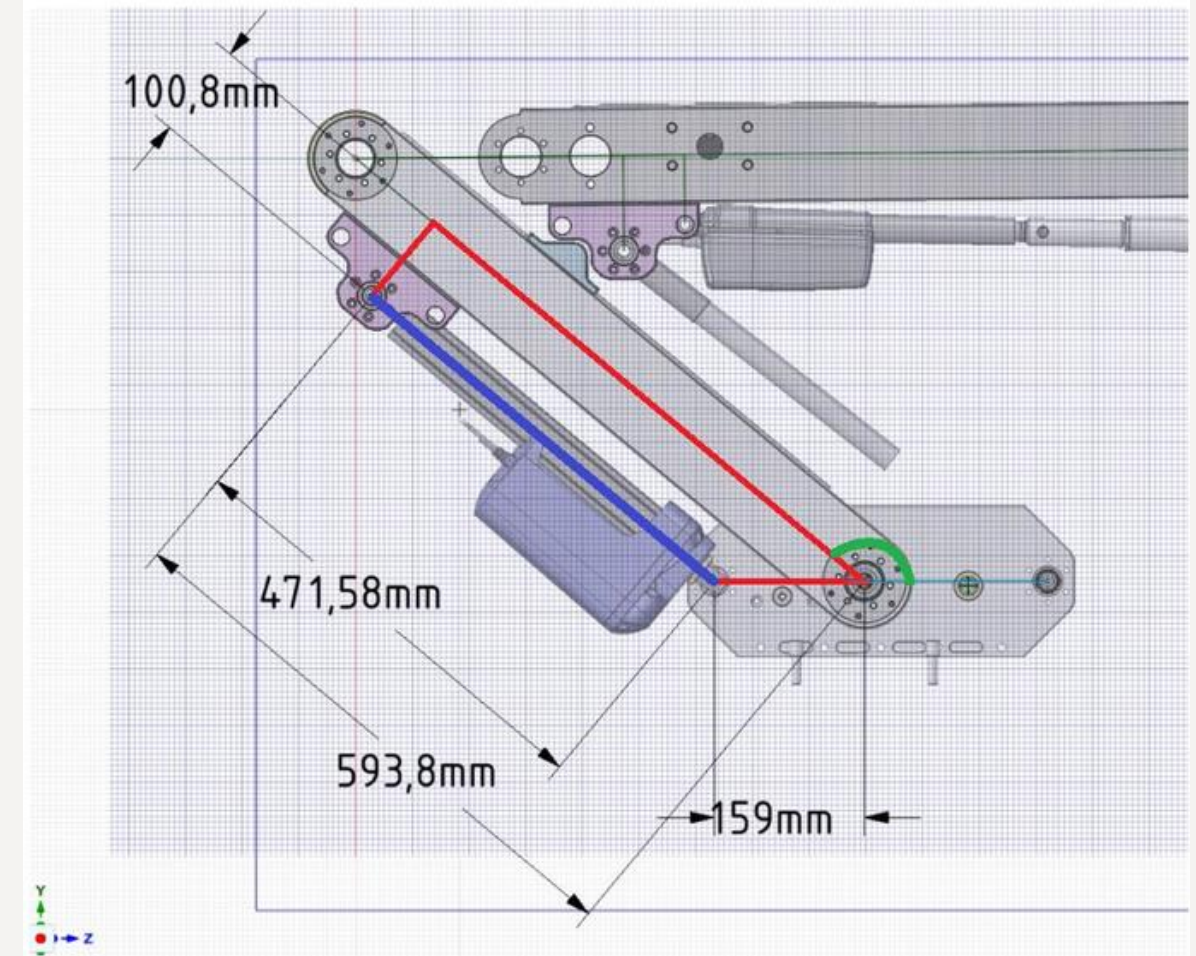
**Wszędzie gdzie coś wygląda jak kąt prosty to jest to kąt prosty.**

|           |                                     |
|-----------|-------------------------------------|
| Czerwony  | Odcinki o niezmiennej długości      |
| Niebieski | Zmienna długość – pomiar z czujnika |
| Zielony   | Poszukiwany kąt                     |

### 3. WRIST ANGLE

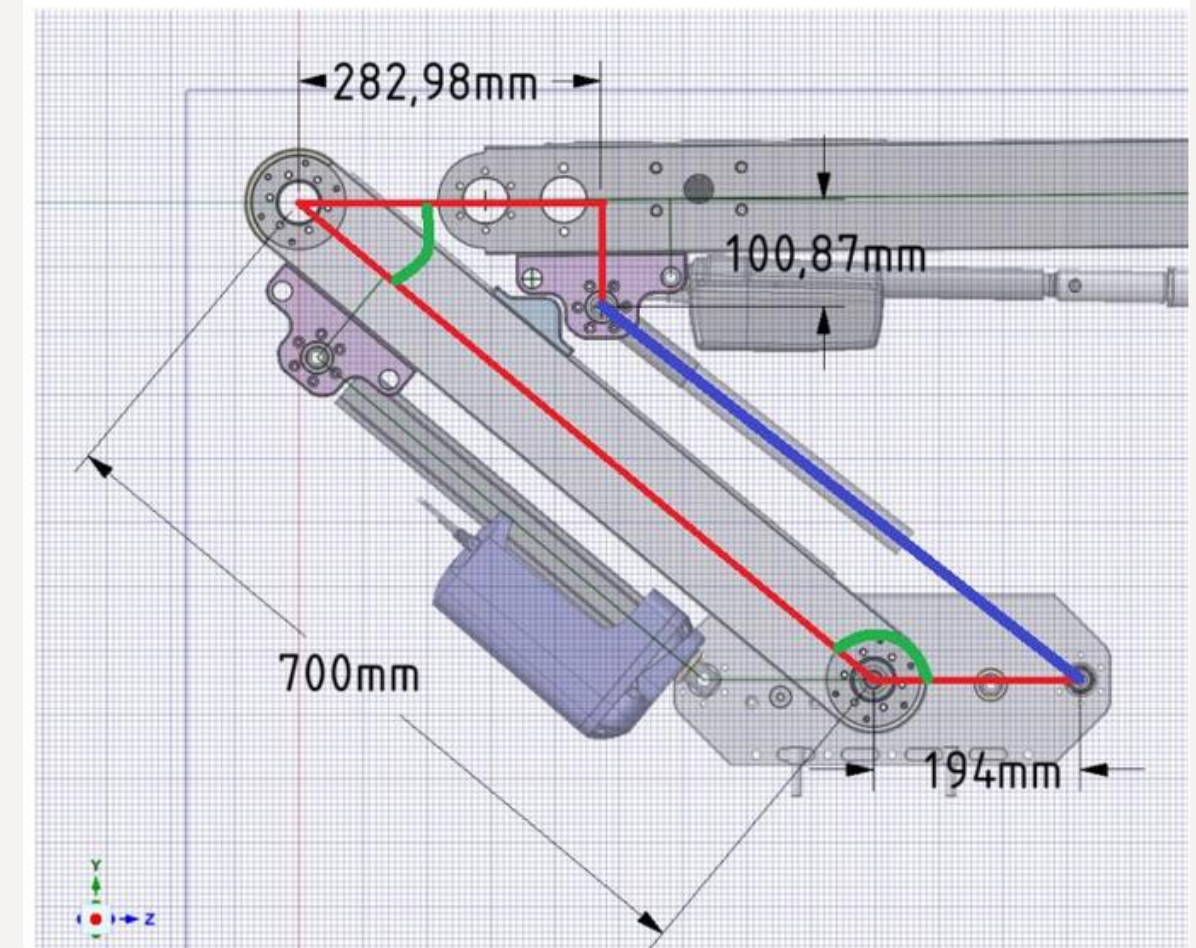


### 1. LOWER ARM ANGLE

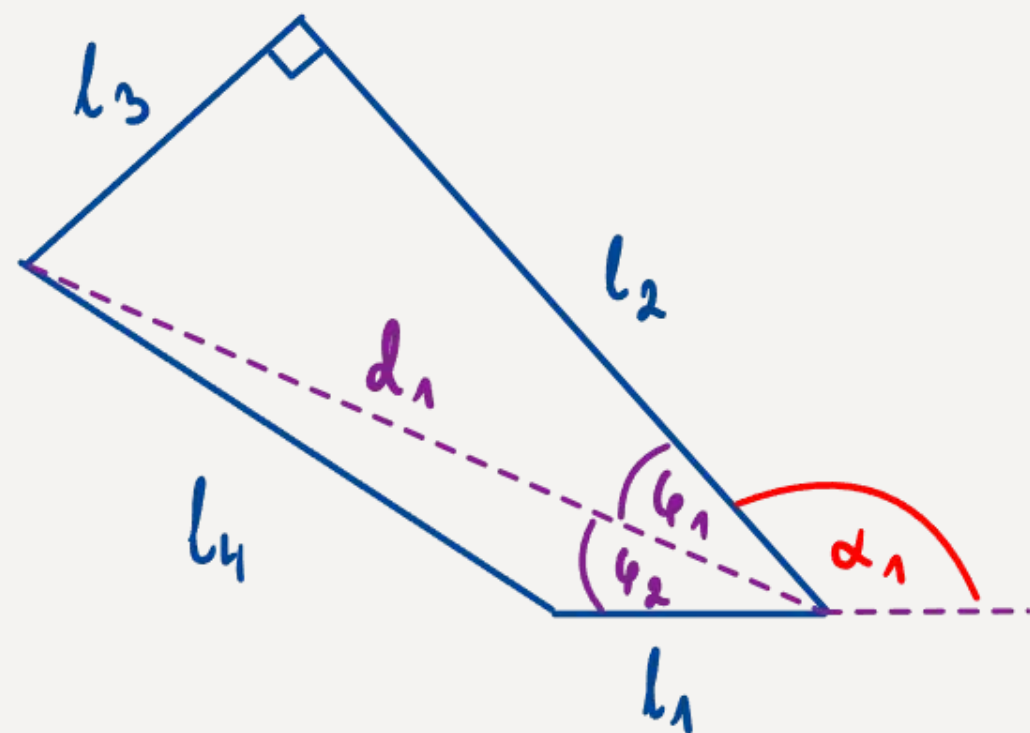


### 2. UPPER ARM ANGLE

Tutaj jest wpływ kąta z poprzedniego wyliczenia!



# PRAWDZIWIY ROBOT CZ.1



$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{l_3}{l_2}\right)$$

( $\Delta$  prostokątny)

$$d_1 = \sqrt{l_2^2 + l_3^2}$$

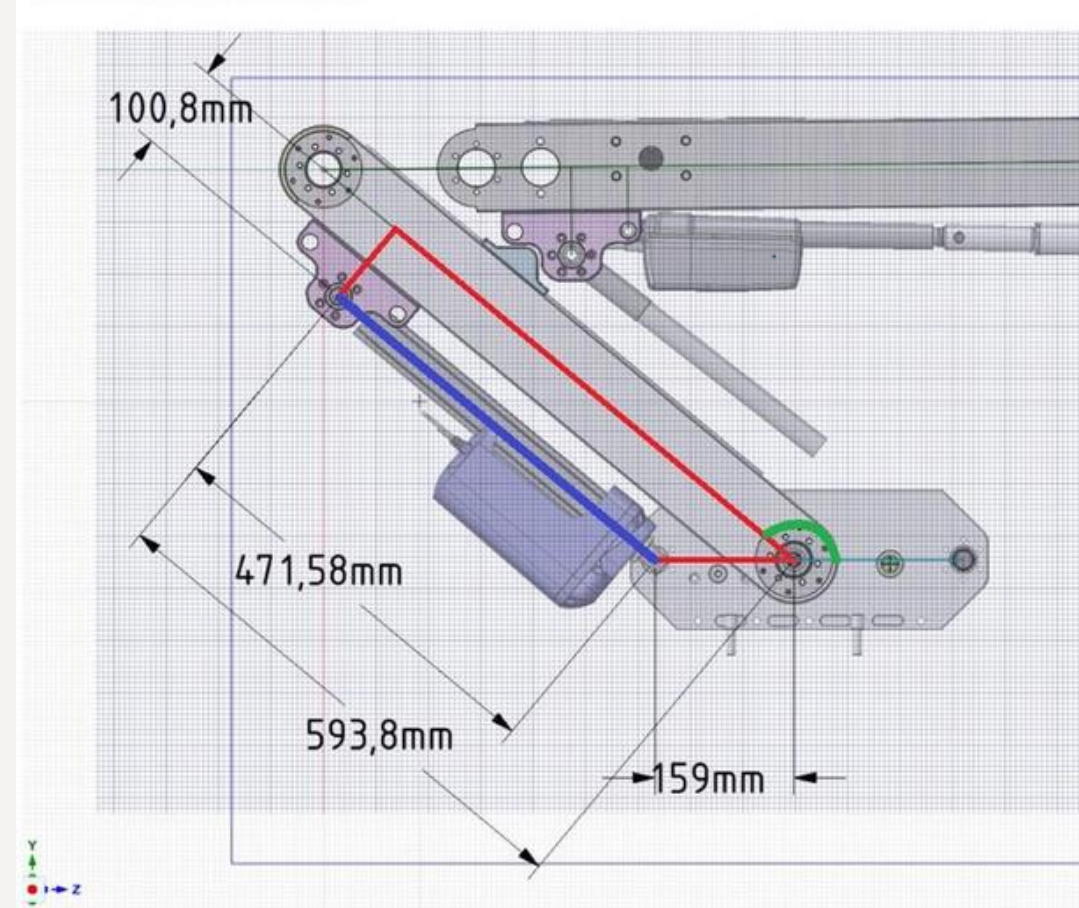
(tw. Pitagorasa)

Z tw. cosinusów:  $\cos \varphi_2 = \frac{d_1^2 + l_1^2 - l_4^2}{2d_1 l_1}$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 + l_1^2 - l_4^2}{2 \cdot \sqrt{l_2^2 + l_3^2} \cdot l_1}\right)$$

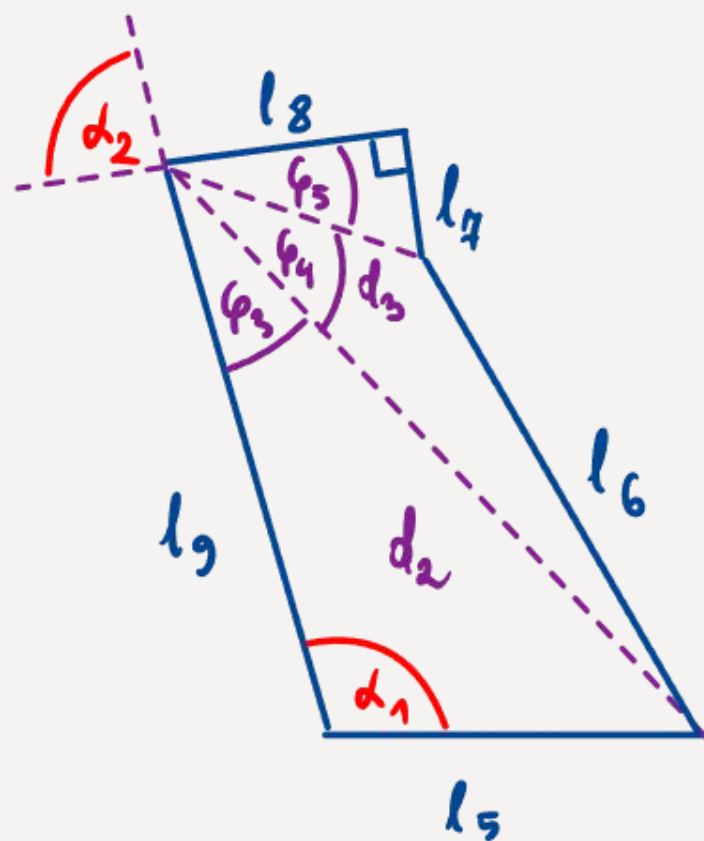
$$\alpha_1 = 180^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{l_3}{l_2}\right) - \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 + l_1^2 - l_4^2}{2 \cdot \sqrt{l_2^2 + l_3^2} \cdot l_1}\right)$$

1. LOWER ARM ANGLE



# PRAWDZIWIY ROBOT CZ.2

Rozważam tylko  $\varphi_4 \geq 0$



$$d_2 = \sqrt{l_5^2 + l_9^2 - 2l_5l_9 \cos \alpha_1} \quad (\text{tw. cosinusów})$$

Z tw. sinusów:

$$\frac{l_5}{\sin \varphi_3} = \frac{d_2}{\sin \alpha_1} \Rightarrow \varphi_3 = \arcsin \left( \frac{l_5 \cdot \sin \alpha_1}{d_2} \right)$$

$$d_3 = \sqrt{l_4^2 + l_8^2} \quad (\text{tw. Pitagorasa})$$

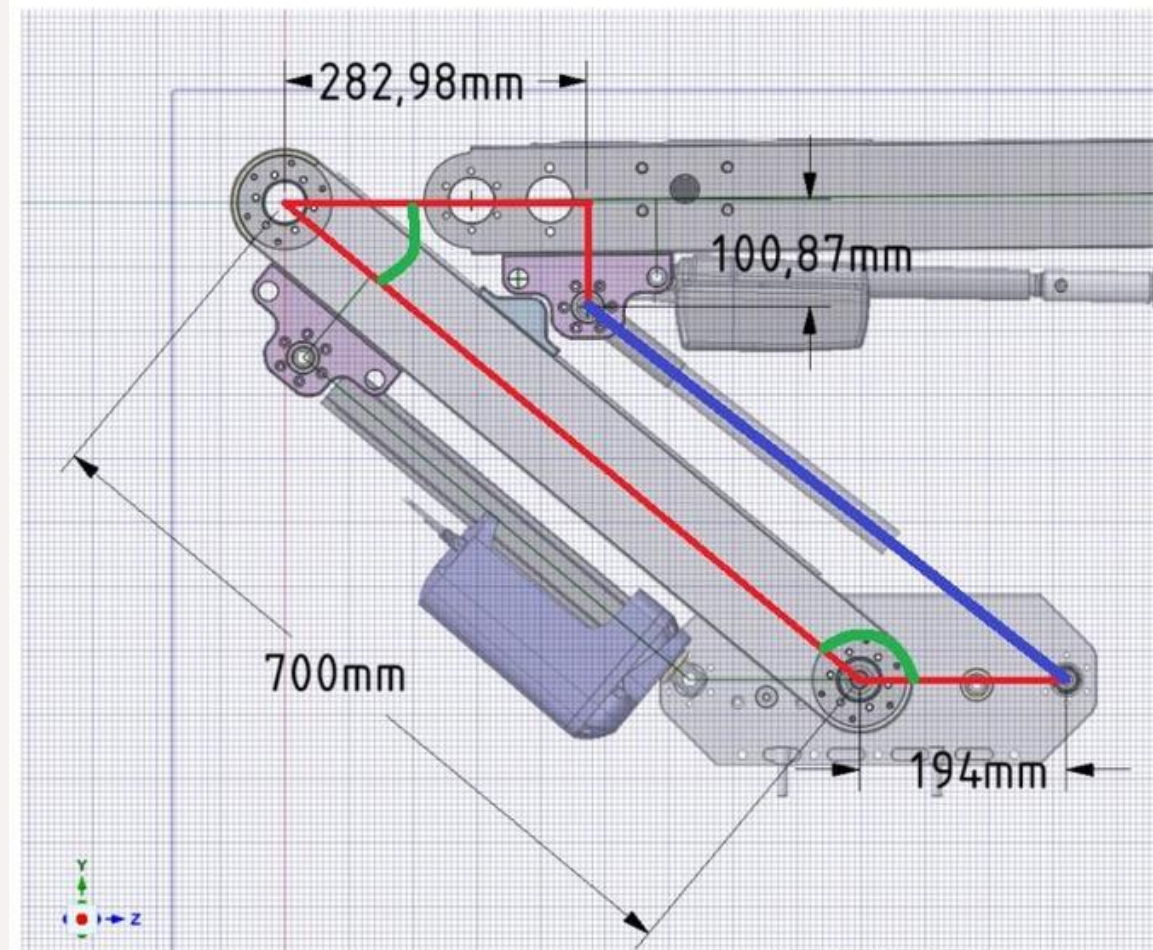
$$\varphi_5 = \arctan \left( \frac{l_4}{l_8} \right) \quad (\Delta \text{ prostokątny})$$

$$\varphi_4 = \arccos \left( \frac{d_2^2 + d_3^2 - l_6^2}{2d_2d_3} \right) \quad (\text{tw. cosinusów})$$

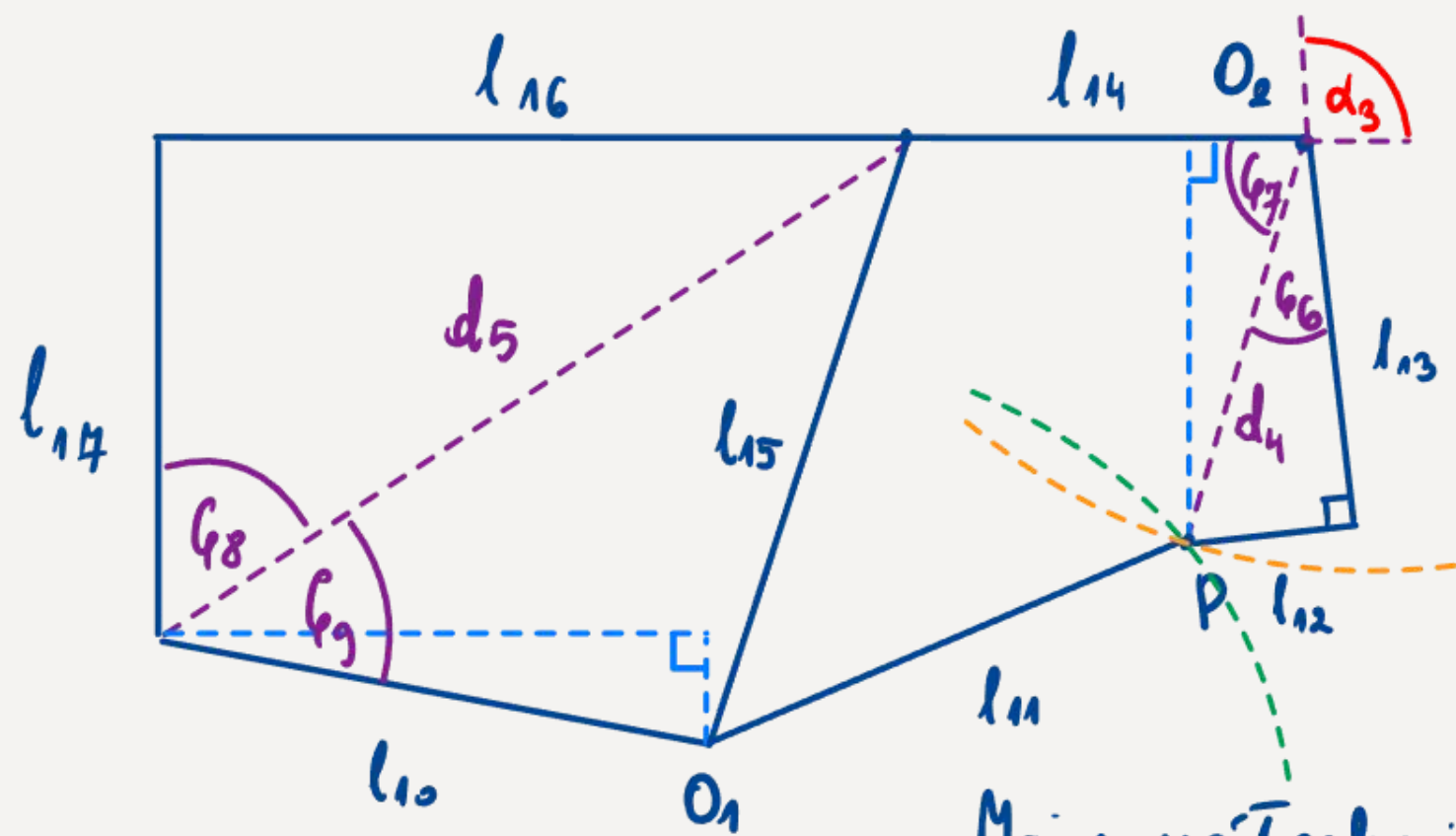
$$\alpha_2 = \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5$$

## 2. UPPER ARM ANGLE

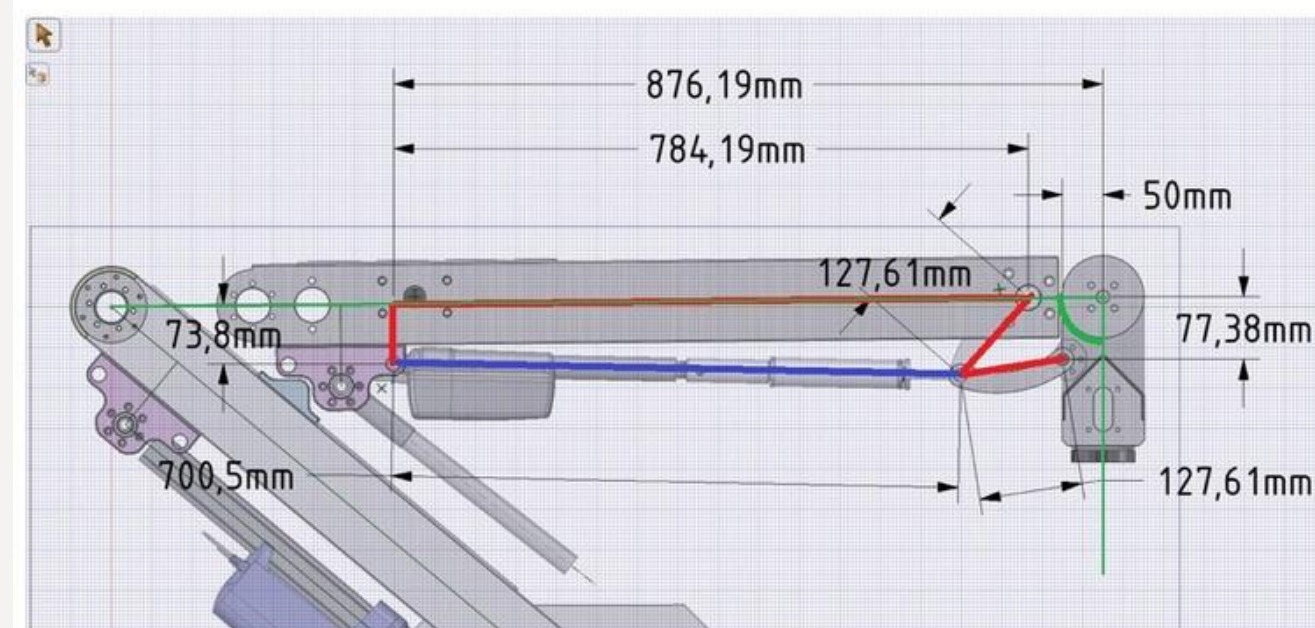
Tutaj jest wpływ kąta z poprzedniego wyliczenia!



# PRAWDZIWIY ROBOT CZ.3



## 3. WRIST ANGLE



Mając współrzędne i promienie okręgów  $O_1$  i  $O_2$  wyznaczamy punkt  $P$ . Wybieramy rozwiązanie z mniejszym  $y$ .

$$d_4 = \sqrt{l_{12}^2 + l_{13}^2}$$

$$\phi_6 = \arctg\left(\frac{l_{12}}{l_{13}}\right)$$

$$d_5 = \sqrt{l_{16}^2 + l_{14}^2}$$

$$\phi_7 = \arctg\left(\frac{l_{16}}{l_{14}}\right)$$

$$\phi_9 = \arccos\left(\frac{d_5^2 + l_{10}^2 - l_{15}^2}{2d_5 l_{10}}\right)$$

$$o_{1x} = l_{10} \cos(\phi_8 + \phi_9 - 90^\circ) = l_{10} \sin(\phi_8 + \phi_9)$$

$$o_{1y} = -l_{14} - l_{10} \sin(\phi_8 + \phi_9 - 90^\circ) = -l_{14} + l_{10} \cos(\phi_8 + \phi_9)$$

Potem wyznaczamy  $P_x$  i  $P_y$

$$\phi_4 = \arccos\left(\frac{l_{16} + l_{14} - P_x}{d_4}\right)$$

$$\alpha_3 = \phi_6 + \phi_7$$

# PRAWDZIWIY ROBOT - KOD

# 1. Lower arm angle

```
return_angle_1 <- function(l_1 = 159, l_2 = 593.8, l_3 = 100.8, l_4 = 471.58){  
  d_1_square <- l_2 ^ 2 + l_3 ^ 2  
  phi_1 <- atan(l_3/l_2)  
  phi_2 <- acos((d_1_square + l_1 ^ 2 - l_4 ^ 2)/(2 * sqrt(d_1_square) * l_1))  
  180 - 180 * (phi_1 + phi_2) / pi  
}
```

```
angle_1 <- return_angle_1()
```

```
#return_angle_1(l_4 = 400) # l_4 nie moze byc za male, bo musi byc spelniona nierownosc trojkata o bokach l_1, l_4 i d_1
```

```
#return_angle_1(l_4 = 470)
```

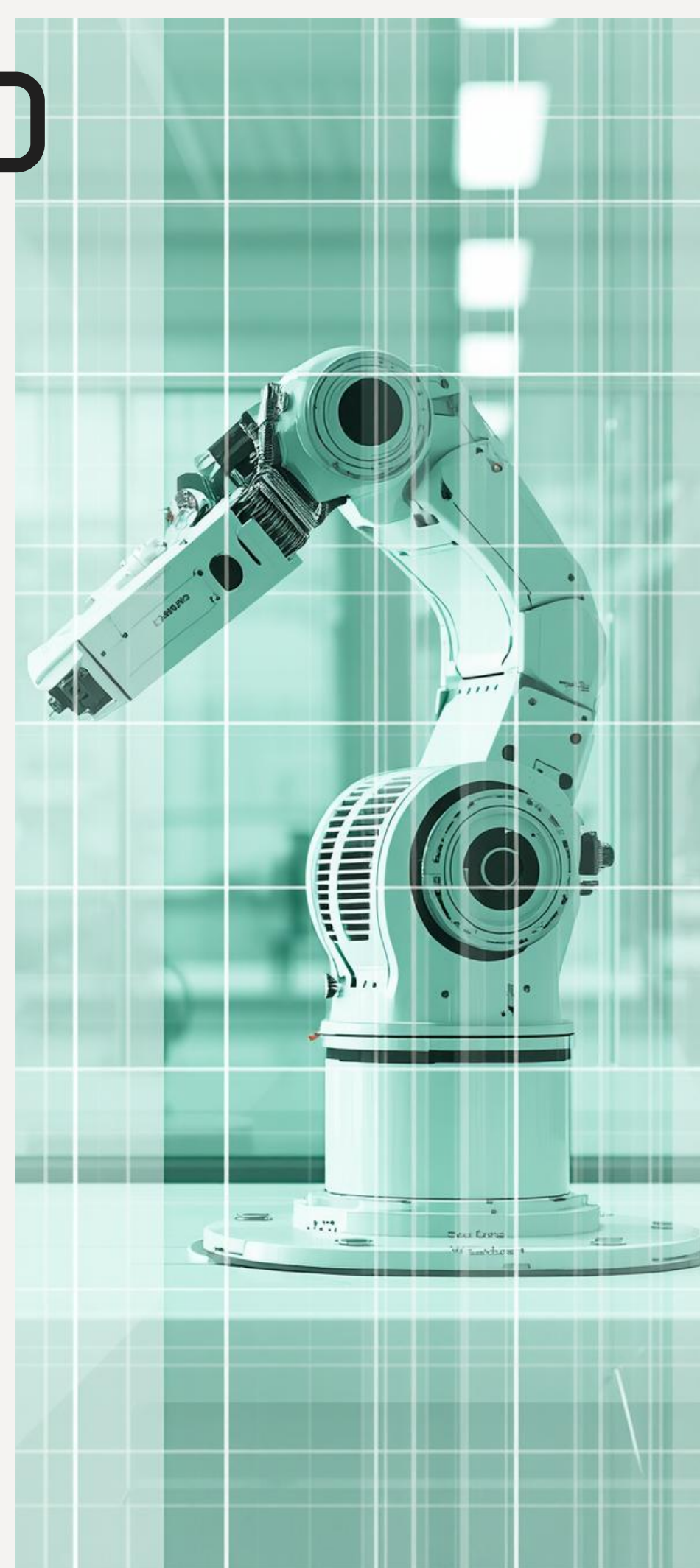
```
#return_angle_1(l_4 = 480)
```

```
#return_angle_1(l_4 = 490)
```

# 2. Upper arm angle

```
return_angle_2 <- function(alpha_1 = return_angle_1(), l_5 = 194, l_6 = 600, l_7=100.97, l_8 = 282.98, l_9 = 700){  
  alpha_1_rad = alpha_1 * pi / 180  
  d_2_square <- l_5 ^ 2 + l_9 ^ 2 - 2 * l_5 * l_9 * cos(alpha_1_rad)  
  phi_3 <- asin(l_5 * sin(alpha_1_rad) / sqrt(d_2_square))  
  d_3_square <- l_7 ^ 2 + l_8 ^ 2  
  phi_5 <- atan(l_7/l_8)  
  phi_4 <- acos((d_2_square + d_3_square - l_6 ^ 2)/(2 * sqrt(d_2_square) * sqrt(d_3_square)))  
  180 * (phi_3 + phi_4 + phi_5) / pi  
}
```

```
angle_2 <- return_angle_2()
```



# PRAWDZIWIY ROBOT – KOD

```
# 3. Wrist angle

lower_y_two_circles <- function(a, b, r_0, c, d, r_1){
  D_square <- (c - a) ^ 2 + (d - b) ^ 2
  D <- sqrt(D_square)
  delta <- sqrt((D + r_0 + r_1) * (D + r_0 - r_1) * (D - r_0 + r_1) * (-D + r_0 + r_1)) / 4
  x <- (a + c) / 2 + (c - a) * (r_0 ^ 2 - r_1 ^ 2) / (2 * D_square) - 2 * delta * (b - d) / D_square
  y <- (b + d) / 2 + (d - b) * (r_0 ^ 2 - r_1 ^ 2) / (2 * D_square) + 2 * delta * (a - c) / D_square
  c(x,y)
}

return_angle_3 <- function(l_10 = 700.5, l_11 = 127.61, l_12 = 50, l_13 = 77.38, l_14 = 92, l_15 = 127.61, l_16 = 784.19, l_17 = 73.8){
  d_4_square <- l_12 ^ 2 + l_13 ^ 2
  phi_6 <- atan(l_12/l_13)
  d_5_square <- l_16 ^ 2 + l_17 ^ 2
  phi_8 <- atan(l_16/l_17)
  phi_9 <- acos((d_5_square + l_10 ^ 2 - l_15 ^ 2)/(2 * sqrt(d_5_square) * l_10))
  o1_x <- l_10 * sin(phi_8 + phi_9)
  o1_y <- - l_17 + l_10 * cos(phi_8 + phi_9)
  p <- lower_y_two_circles(o1_x, o1_y, l_11, l_14 + l_16, 0, sqrt(d_4_square))
  phi_7 <- acos((l_14 + l_16-p[1])/sqrt(d_4_square))
  180 * (phi_6 + phi_7) / pi
}

angle_3 <- return_angle_3()
```

Rozważamy dwa okręgi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_0^2$$

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r_1^2$$

gdzie:

- $(a, b), (c, d)$  — środki okręgów,
- $r_0, r_1$  — promienie.

Odległość między środkami:

$$D = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

Warunek istnienia punktów przecięcia:

$$|r_0 - r_1| \leq D \leq r_0 + r_1$$

Wzór pomocniczy wynikający z geometrii trójkąta i wzoru Herona:

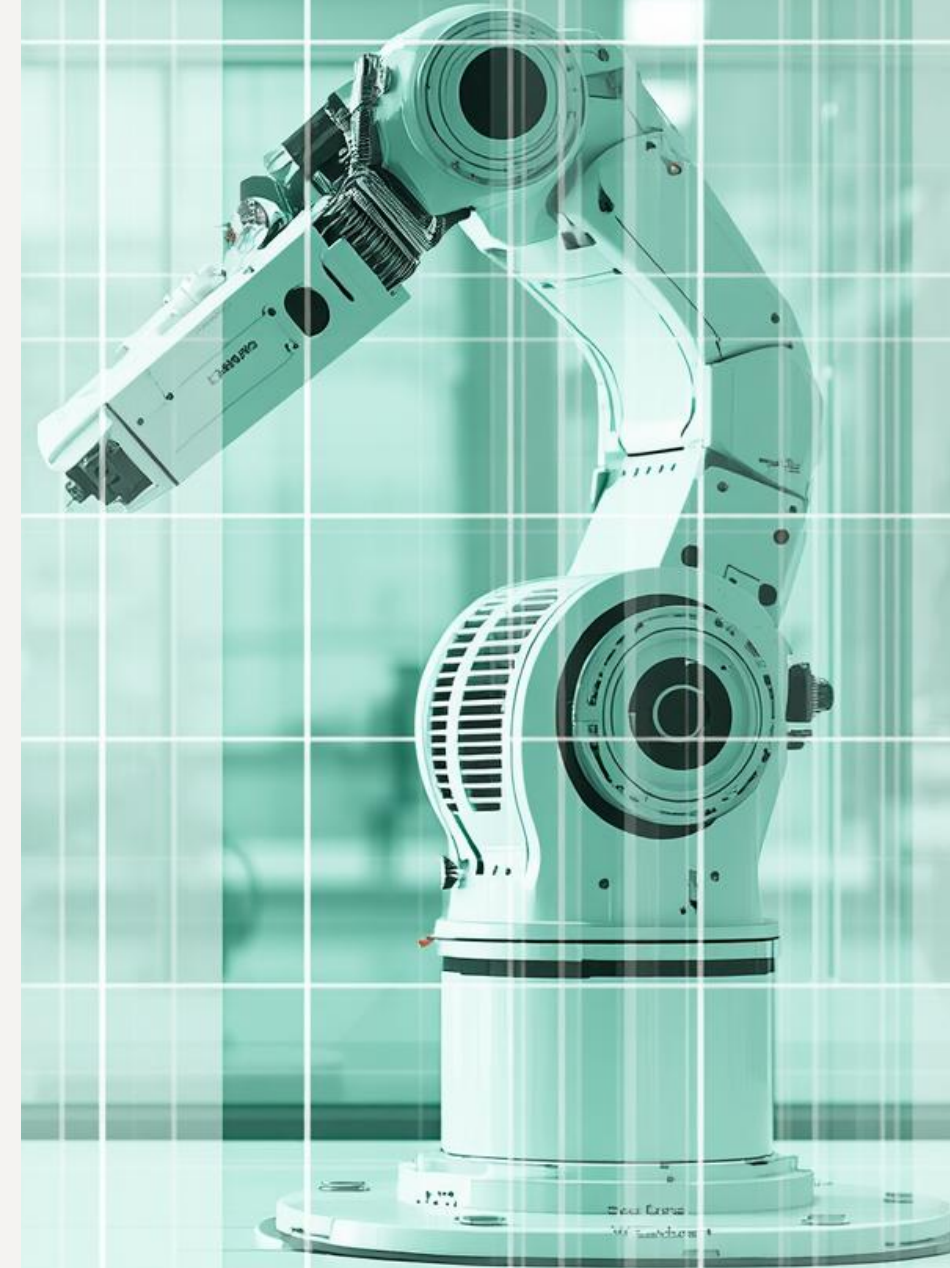
$$\Delta = \frac{\sqrt{(D+r_0+r_1)(D+r_0-r_1)(D-r_0+r_1)(-D+r_0+r_1)}}{4}$$

Współrzędne jednego z punktów przecięcia:

$$x = \frac{a+c}{2} + \frac{(c-a)(r_0^2-r_1^2)}{2D^2} - \frac{2\Delta(b-d)}{D^2}$$

$$y = \frac{b+d}{2} + \frac{(d-b)(r_0^2-r_1^2)}{2D^2} + \frac{2\Delta(a-c)}{D^2}$$

Drugi punkt przecięcia otrzymuje się przez zmianę znaku przy składnikach zawierających  $\Delta$ .



# PRAWDZIWIY ROBOT

W procesie tym dążymy do wyznaczenia kątów przegubów na podstawie pożądanej pozycji efektora końcowego. System operuje w układzie współrzędnych W, H (szerokość, wysokość), gdzie punktem odniesienia (0,0) jest punkt rotacji dolnego ramienia (p1).

## Krok 1: Transformacja Współrzędnych

Na podstawie kinematyki prostej (Forward Kinematics) znamy pozycje X, Y, Z dla punktów kontrolnych. Następuje zamiana układu na płaszczyznę roboczą W, H względem punktu p1.

## Krok 2: Definicja Trajektorii i Orientacji Chwybaka

Po aktywacji trybu IK, linia prosta  $y = ax + b$  oraz kąt chwytaka (setGA) są zapamiętywane. Każda zmiana trajektorii wymusza ponowne przeliczenie geometrii.

## Krok 3: Wyznaczenie Punktu Docelowego p4

Punkt p4 jest celem obliczeń. Odczytujemy aktualną pozycję p4 i dodajemy do niej mały wektor przyrostu (0.02) wzdłuż linii ruchu  $y = ax + b$ .

## Krok 4: Wyznaczenie p3 na podstawie p4 i setGA

Znając współrzędne p4(W,H), długość członu a5 oraz kąt setGA, obliczamy pozycję punktu p3.

## Krok 5: Obliczenia Trygonometryczne Trójkąta (l12)

Znając pozycję p3 względem bazy p1, obliczamy długość l12 (odległość od p1 do p3).

## Krok 6: Wyznaczenie Kąta a25 (Twierdzenie Cosinusów)

Używając długości l12, l23 (UA) oraz a4 (LA), wyznaczamy kąt a25 z twierdzenia cosinusów dla trójkąta p1-p2-p3.

## Krok 7: Obliczenie Kąta Dolnego Ramienia (LA)

Kąt LA (Riddler angleLA) jest sumą kątów składowych:  $a12 + a25 + a23$  (gdzie a23 jest stałe).

## Krok 8: Obliczenie Kąta Górnego Ramienia (UA)

Znając długości boków, obliczamy kąt a34 (ponownie twierdzenie cosinusów). Finalny kąt UA to różnica  $a34 - a23$ .

## Krok 9: Obliczenie Kąta Nadgarstka (WA)

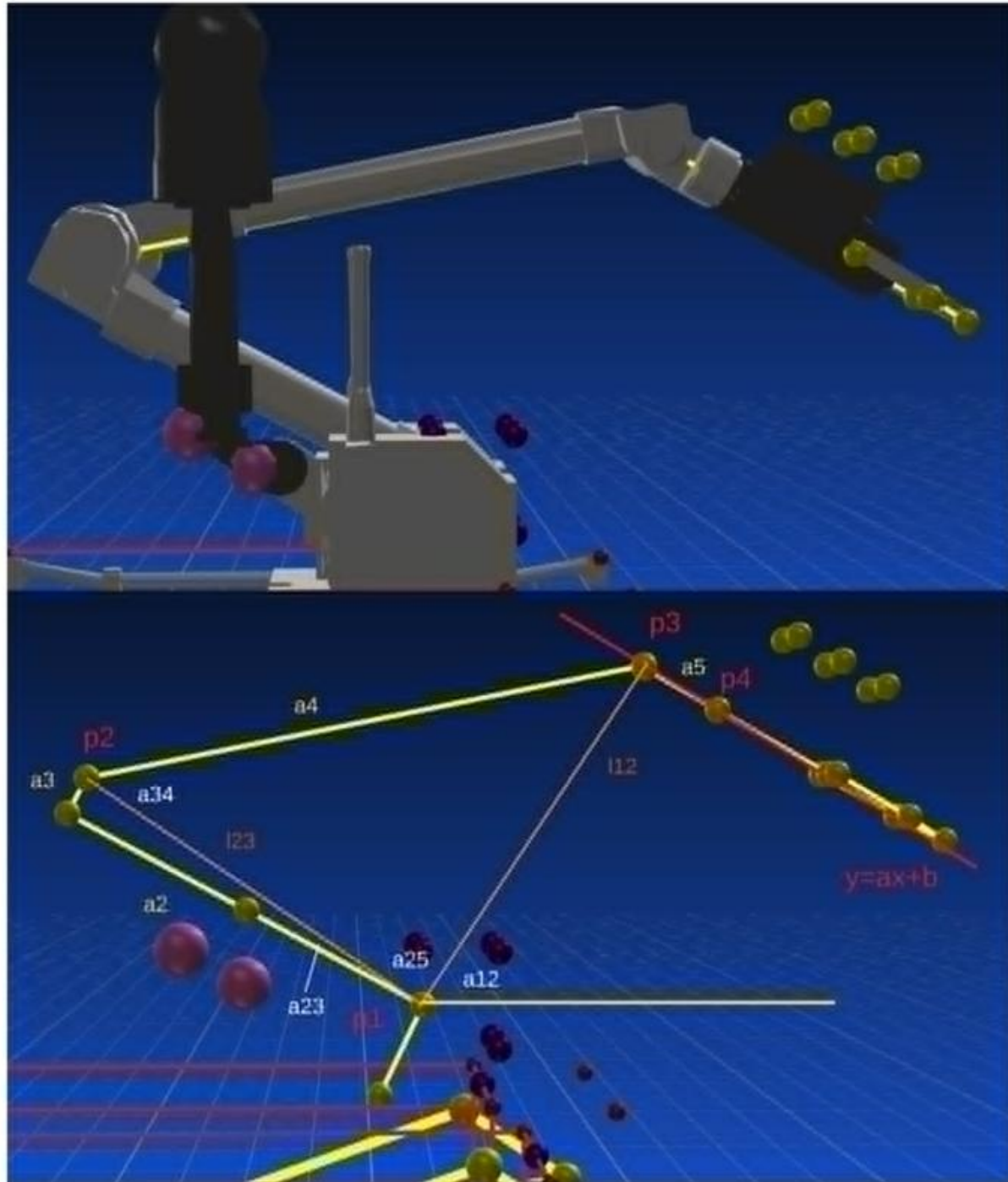
Kąt WA jest wyliczany tak, aby zachować zadaną orientację chwytaka:  $WA = setGA - angleLA - angleUA - \pi/2$ .

## 2. Sterowanie i Prędkości (Speeds)

- Nowe kąty są odejmowane od poprzednich wartości w celu wyznaczenia delty ruchu.
- Różnice są skalowane do wartości maksymalnej 700 (sygnał PWM dla silników).
- Prędkości dla wszystkich 3 osi są przesyłane do kontrolerów silników za pomocą magistrali CAN.
- Punkt p4 jest korygowany automatycznie na podstawie sprzężenia zwrotnego z przegubów, aby spełniać dwa ograniczenia: p4 musi leżeć na linii  $y = ax + b$ , a kąt p3-p4 względem podłoża musi wynosić setGA.

## 3. Weryfikacja i Limity

Po każdym obliczeniu kątów LA, UA, WA następuje ich weryfikacja względem zdefiniowanych limitów minimalnych i maksymalnych. Jeśli którykolwiek kąt wykracza poza zakres, ruch zostaje zablokowany.



# PRAWDZIWIY ROBOT

**Car** <https://www.youtube.com/watch?v=THwBGRb4bcE>

**Airplane** <https://www.youtube.com/watch?v=WcIyn8fMIO8>

**Stairs** <https://www.youtube.com/watch?v=aZhyqj2TITM>



# LITERATURA



1

Notatki ze studiów i własne z kierunku  
“Automatyka i Robotyka” Politechnika Warszawska

2

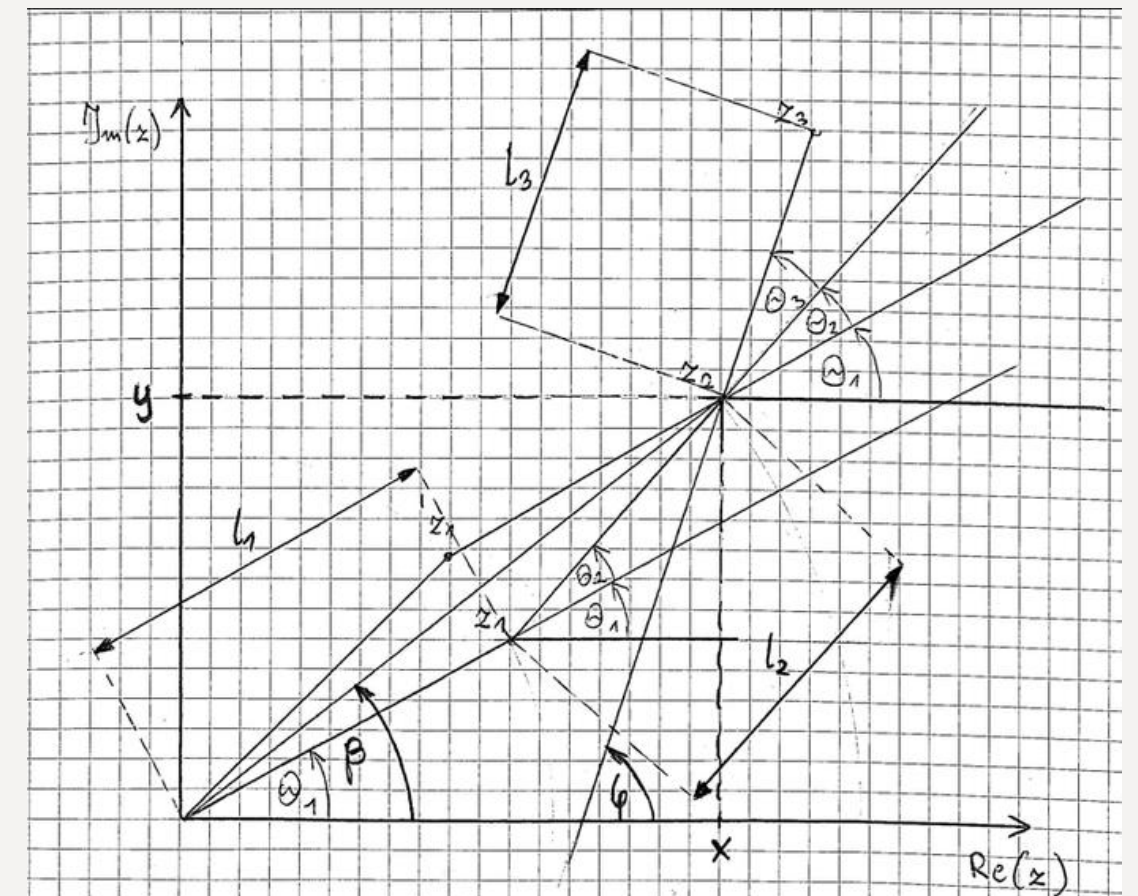
J. M. Selig – Introductory Robotics

3

[https://staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/air/PRwyklad\\_4.pdf](https://staff.uz.zgora.pl/wpaszke/materialy/air/PRwyklad_4.pdf)

4

Materiały związane z prawdziwym robotem od kolegi Krzyśka :)



# NA KONIEC O MOIM KANAŁE NA YT

**Slowrunner Matematyczny**  
@SlowrunnerMatematyczny • 34 subskrybentów • 45 filmów  
Cześć! Na moim kanale zamierzam slowrunnować zadania matematyczne z konkursów ...więcej  
Subskrybujesz

Wideo Shorts Playlisty Posty

Najnowsze Popularne Najstarsze

**KÓŁKO MATEMATYCZNE POZIOM OMJ POTĘGI, PIERWIĄSTKI. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA ZADANIE 4** #359  
Zadanie 1.1.4. Wylicz liczbę  $\sqrt{11} - \sqrt{22} + \sqrt{33} - \sqrt{44} + \dots$

**KÓŁKO MATEMATYCZNE POZIOM OMJ POTĘGI, PIERWIĄSTKI. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA ZADANIE 3** #552  
Zadanie 1.1.3. Oblicz  $\frac{1}{2\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}+3} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2}+n}$

**KÓŁKO MATEMATYCZNE POZIOM OMJ POTĘGI, PIERWIĄSTKI. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA ZADANIE 2** #319  
Zadanie 1.1.2. Wylicz liczbę  $\sqrt{3}(\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3-\sqrt{3}})$

**KÓŁKO MATEMATYCZNE POZIOM OMJ POTĘGI, PIERWIĄSTKI. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA ZADANIE 1** #345  
Zadanie 1.1.1. Uzasadnij nierówność z mianownikami  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}}$

Repunity - Kółko Matematyczne Poziom OMJ 16 wyświetleń • 2 dni temu

Suma teleskopowa z pierwiastkami - Kółko Matematyczne Poziom OMJ 16 wyświetleń • 5 dni temu

Zagnieżdżone pierwiastki po raz pierwszy - Kółko Matematyczne Poziom OMJ 33 wyświetlenia • 9 dni temu

Paskudna niewymierność? - Kółko Matematyczne Poziom OMJ 31 wyświetleń • 12 dni temu

**IV Międzynarodowy Konkurs Przedmiotowy z Matematyki - Geometria Elementarna 2016 - Zadania 1-2**  
Geometria Elementarna  
 $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$  #25 21:12

**KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI - WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA**  
Krzyżówki Liczbowe 6-10 #11 20:29

**IV Międzynarodowy Konkurs Przedmiotowy z Matematyki - Geometria Elementarna 2016 - Zadania 1-2**  
Geometria Elementarna  
Gdy zadanie wychodzi trochę przypadkiem... #24 19:28

**KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI - WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA**  
Krzyżówki Liczbowe 1-5 #18 18:30

Suma losowych kątów ma mieć 90 stopni 33 wyświetlenia • 2 tygodnie temu

Krzyżówki Liczbowe 6-10 12 wyświetleń • 2 tygodnie temu

Zadanie wyszło trochę przypadkiem 50 wyświetleń • 3 tygodnie temu

Krzyżówki Liczbowe 1-5 8 wyświetleń • 3 tygodnie temu

**KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI - WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA**  
10 Zadań z Liczb Rzymskich I, V, X, L, C, D, M #12 12:31

**KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI - WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA**  
Wprowadzenie do Nowej Serii  $ax + by = c$  #11 2:09

**IV Międzynarodowy Konkurs Przedmiotowy z Matematyki - Geometria Elementarna 2016 - Zadania 1-2**  
Geometria Elementarna  
Menelaos, czyli jego debiut na kanale #22 16:18

**IV Międzynarodowy Konkurs Przedmiotowy z Matematyki - Geometria Elementarna 2016 - Zadania 1-2**  
Geometria Elementarna  
Klasyka Pól w trapezie #27 22:31

Liczby Rzymskie 31 wyświetleń • 1 miesiąc temu

Start Drugiej Serii - Konkurs Przedmiotowy z Matematyki! 18 wyświetleń • 1 miesiąc temu

Tutaj Menelaos wkroczył do gry 47 wyświetleń • 1 miesiąc temu

Klasyczne zadanie z pól w trapezie 36 wyświetleń • 1 miesiąc temu



Seria z Mistrzostw Polski w Geometrii Elementarnej, a w przyszłości Wrocławska Geometryczna Liga Zadaniowa



Roadmap olimpijski – Od konkursu przedmiotowego z matematyki, po OMJ i OM



Materiały z innych konkursów matematycznych oraz kółek