

Reszty kwadratowe

1. Dowieść, że wśród dowolnych siedmiu liczb całkowitych zawsze są dwie takie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10.
2. Wyznacz wszystkie reszty i niereszy modulo 8 i 15.
3. Rozwiąż kongruencje:
 - (a) $x^2 \equiv 9 \pmod{35}$,
 - (b) $x^2 \equiv 1 \pmod{2024}$,
 - (c) $2x^2 + 7x \equiv -10 \pmod{143}$,
 - (d) $x^3 \equiv -1 \pmod{p}$ dla $p = 7, 47$.
4. Wykaż, że równanie $15x^2 - 7y^2 = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.
5. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n , takie że liczba $2^n + 7^n$ jest kwadratem.
6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , takie że $p^2 + 11$ ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.
7. Wykaż, że nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że 2^n jest dzielnikiem $3^n + 1$.
8. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p , że $4p^2 + 1$ oraz $6p^2 + 1$ są również liczbami pierwszymi.
9. Niech p będzie iloczynem pierwszych $n > 1$ liczb pierwszych. Pokaż, że $p - 1$ nie jest kwadratem.
10. Czy suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych może być kwadratem?
11. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania $a^2 + b^2 = c^2$ w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a oraz c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.
12. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
13. Niech $p, q > 3$ będą liczbami pierwszymi. Wykaż, że liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 24.
14. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q takie, że $p^2 - 2q^2 = 1$.
15. Wykaż, że jeśli liczby p oraz $p^2 + 2$ są pierwsze, to również liczba $p^3 + 2$ jest pierwsza.
16. Niech $n > 6$. Pokaż, że jeśli liczby $n - 1$ oraz $n + 1$ są pierwsze, to liczba $n^2(n^2 + 16)$ jest podzielna przez 720.
17. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, niech a, a' będą resztami, a b, b' nieresztami kwadratowymi modulo p . Udowodnij, że aa' oraz bb' są resztami, a ab i $a'b'$ — nieresztami kwadratowymi modulo p .
18. Udowodnij, że -1 jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod{4}$.
19. Sprawdź, że: (a) $2 \cdot 26! \equiv -1 \pmod{29}$, (b) $18! \equiv -1 \pmod{437}$.
20. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą oraz $a + b = p - 1$. Udowodnij, że $p \mid a!b! + (-1)^a$.
21. Udowodnij, że $2^n \nmid n!$, ale $2^n \mid (2n)! \cdot n!$.
22. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , takie że zapis dziesiętny $n!$ kończy się dokładnie 1000 zerami.
23. Udowodnij, że liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy n nie jest potęgą liczby 2.
24. Znajdź cyfrę jedności i dziesiątek liczb 9^{9^9} i $7^{9^{9^9}}$.
25. Znajdź ostatnią cyfrę różną od zera w zapisie dziesiętnym liczby $2020!$.
26. Niech $p \geq 5$. Udowodnij, że p jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \cdot (p - 4)! \equiv 1 \pmod{p}$.
27. Znajdź wszystkie rozwiązania całkowite równania $15x + 10y + 6z = 61$.
28. Niech $p \neq 2$ będzie dzielnikiem pierwszym liczby $x^2 + y^2$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.
29. Znajdź wszystkie całkowite rozwiązania równań:
 - (a) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$,
 - (b) $x^2 - 3y^2 = 17$,
 - (c) $x^2 - y^2 = 2xyz$,
 - (d) $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$,
 - (e) $x^2 + (x - 1)^2 = y^4 + (y + 1)^4$,
 - (f) $x^2 + 3 = 4y(y + 1)$.
30. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $3x + 4y = 5z$.