

Ciągi jednomonotoniczne

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2.$$

2. Wykaż, że jeżeli liczby x i y są dodatnie oraz n jest liczbą naturalną ($n \geq 1$), to:

$$\frac{x^n}{y} + \frac{y^n}{x} \geq x^{n-1} + y^{n-1}.$$

3. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówność Nesbitta:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

5. Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówność:

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

6. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

7. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c, d są dodatnie, to:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

8. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnij nierówność:

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

9. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że:

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{8} + \dots + \frac{a_n}{n \cdot 2^n} \geq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

10. Udowodnij, że jeżeli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x + y + z = 1$, to:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{4}.$$

11. Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Udowodnij, że:

$$9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3.$$

12. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówność:

$$\frac{a^2 + c^2}{b} + \frac{b^2 + a^2}{c} + \frac{c^2 + b^2}{a} \geq 2(a + b + c).$$