

# KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

## GIMNAZJA – ELIMINACJE SZKOLNE LOGIKA – KONSPEKT WYKŁADU

- 1) Czym zajmuje się logika
- 2) George Boole – twórca logiki dwuwartościowej
- 3) Zdania logiczne
- 4) Spójniki logiczne i bramki logiczne
- 5) Zaprzeczanie zdań (koniunkcji, alternatywy i implikacji)
- 6) Zadania o ustalaniu tożsamości
- 7) Zadania o kłamcach

**Ad 1.** Logika jako nauka rozwinęła się w starożytnej Grecji. Jej podstawy dał Arystoteles. Słowo *logos* oznaczało mowę (stąd logopeda), a logika była nauką o jasnym i precyzyjnym wypowiedaniu się i poprawnym wnioskowaniu. Dzisiaj *logia* oznacza tyle, co nauka (biologia, psychologia), czyli jest synonimem precyzji.

Język potoczny często jest mało precyzyjny. Należy dbać o jednoznaczność wypowiedzi.

Przykłady zdań nieprecyzyjnych:

- *Bilety można kupić u kierowcy w soboty, niedziele oraz dni świąteczne po godzinie 18.* (MPK Wrocław)  
Czy można kupić bilet u kierowcy w niedzielny poranek? Aby poprawić precyzję komunikatu wystarczyłoby zmienić szyk zdania: *Bilety można kupić u kierowcy po godzinie 18 w soboty, niedziele oraz dni świąteczne.*
- *Powiedział, że się ochłodziło, (!) i zaczął padać śnieg.* U kogo ten śnieg spadł? Na piśmie wypowiedź jest jasna, bo o jej znaczeniu decyduje użycie przecinka. Ale w mowie nie.
- W matematyce byłoby podobnie, ale są umowy, np. kolejność wykonywania działań: ile to jest  $-3^2$ ?
- Konieczność precyzyjnych poleceń jest istotna w kontaktach z maszyną (sztuczną inteligencją). *Przynieś szklankę lub kubek oraz wazon.* Ile rzeczy przyniesie robot? Od 1 -3. To zależy od 'rozstawienia nawiasów'.

Przykład rozumowania logicznego:

- Założenia: *George jest człowiekiem. Ludzie są śmiertelni.* Wniosek: *George jest śmiertelny.*

Grecy sformułowali podstawowe **prawa logiki**, które stały się narzędziem produkowania nowych twierdzeń, np:

- prawo sprzeczności: dwa zdania wzajemnie sprzeczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe,
- prawo wyłączonego środka: z dwóch zdań sprzecznych jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe,
- zasada podwójnego przeczenia: jeżeli nieprawda, że  $p$  jest fałszywe, to  $p$  jest prawdziwe,
- zasada dedukcji: jeśli uznajemy zdanie  $p$  i uznajemy rozumowanie prowadzące od zdania  $p$  do zdania  $q$ , to musimy uznać także zdanie  $q$ ,
- zasada sprowadzenia do niedorzeczności (sprzeczności): jeśli ze zdania  $p$  wynika zaprzeczenie tego zdania (dowolne zdanie fałszywe), to zdanie  $p$  nie jest prawdziwe.

**Ad 2. George Boole** (1815!!!-1864) wprowadził pojęcie zdania logicznego oraz dwie wartości logiczne prawdy i fałszu. Na zdaniach wykonywane były operacje koniunkcji, alternatywy i negacji zdefiniowane w sposób arytmetyczny. Logika boolowska 70 lat po jego śmierci stała się podstawą działania komputerów. Więcej o GB na slajdach:

<http://www.fmw.uni.wroc.pl/dla-nauczycieli/seminarium-i3/2015/2016/seminarium-i3-201516>

**Ad 3.** Zdanie logiczne to takie zdanie, któremu jednoznacznie można przypisać wartość prawdy lub fałszu. Nie każde zdanie jest zdaniem logicznym. Przykłady:

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| • Która godzina?                | • Chciałbym mieć psa.                           |
| • Dziś jest raczej ciepło.      | • Zdanie, które właśnie czytasz, jest fałszywe. |
| • Może przyjdę jutro.           | • Byłbym zapomniał.                             |
| • Koszulka Janka jest czerwona. |   |

Ze zdań prostych tworzy się zdania złożone za pomocą spójników logicznych I/AND (koniunkcja), LUB/OR (alternatywa) i NIE/NOT (zaprzeczenie). Można definiować dalsze spójniki np. ALBO (alternatywa wykluczająca) JEŚLI..., TO... /IF.../THEN(implikacja).

Przykłady:

- |  |   |
|--|---|
| • Na stole leży kreda i ołówek.          | • Na stole nie leży kreda.                          |
| • Na stole leży kreda lub ołówek.        | • Jeśli będzie padało to nie przyjdę.               |
| • Na stole leży albo kreda, albo ołówek. | • Jeśli będzie trzęsienie ziemi, to dom się zawali. |

Edykt królewski w Bajdocji ustala, że poddani mają nosić T-shirty spełniające warunek: jeśli z jednej strony jest 7, to z drugiej musi być A. Król Rumbo zauważył 7 ludzi na ulicy idących w różne strony: A, 7, B, 6, C, 5. Chciałby sprawdzić, czy poddani przestrzegają jego praw. Których powinien wezwać do kontroli? Jaka jest najmniejsza liczba sprawdzeń? (7, B, C)

## KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

**Ad 4.** Definicje spójników logicznych (tabelki wypełniać wspólnie z uczniami na powyższych przykładach).

A I B (A AND B)

A\B	P	F
P	P	F
F	F	F

*	1	0
1	1	0
0	0	0

A ALBO B

A\B	P	F
P	F	P
F	P	F

+2	1	0
1	0	1
0	1	0

A LUB B (A OR B)

A\B	P	F
P	P	P
F	P	F

max	1	0
1	1	1
0	1	0

JEŚLI A, TO B (IF A THEN B)

A\B	P	F
P	P	F
F	P	P

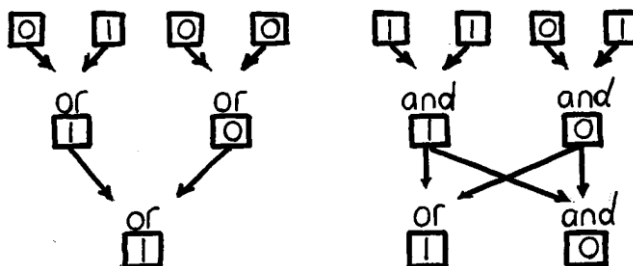
	1	0
1	1	0
0	1	1

NIE A (NOT A)

A	P	F
NIE A	F	P

	1	0
	0	1

Logika dwuwartościowa pozwala budować dla zdań obwody elektryczne (prawda = prąd płynie, fałsz = prąd nie płynie, a jak ocenić, kiedy prąd płynie silniej lub słabiej?). Konstrukcja bramek Logicznych AND i OR na slajdach. Można używać wielu kombinacji takich bramek, np.



Procesor, płyta główna komputera, a nawet telefon komórkowy to nic innego, jak miliardy takich bramek.

**Ad 5.** Zaprzeczanie zdań złożonych.

Zaprzeczenie koniunkcji: *Ania i Bartek są szczęśliwi*. Testowanie różnych wariantów.

	A i B są S	A i B są nie S	A jest nie S lub B jest nie S	inne
A=P, B=P	P	F	F	
A=P, B=F	F	F	P	
A=F, B=P	F	F	P	
A=F, B=F	F	P	P	

Mamy zatem prawo logiczne:  $\text{NIE}(A \text{ I } B) = \text{NIE } A \text{ LUB } \text{NIE } B$ .

Zaprzeczenie alternatywy: *Ania lub Bartek są szczęśliwi*. Testowanie różnych wariantów.

	A lub B są S	A lub B są nie S	A jest nie S i B jest nie S	inne
A=P, B=P	P	F	F	
A=P, B=F	P	P	F	
A=F, B=P	P	P	F	
A=F, B=F	F	P	P	

Mamy zatem prawo logiczne:  $\text{NIE}(A \text{ LUB } B) = \text{NIE } A \text{ I } \text{NIE } B$ .

Zaprzeczenie implikacji: *Jeśli będzie trzęsienie ziemi, to dom się zawali*. Testowanie.

	T to Z	NIE (T to Z)	T i NIE Z	inne
T=P, Z=P	P			
T=P, Z=F	F			
T=F, Z=P	P			
T=F, Z=F	P			

Mamy zatem prawo logiczne:  $\text{NIE}(A \text{ TO } B) = A \text{ I } \text{NIE } B$ .

Czy zachodzi prawo logiczne:  $\text{Jeśli } A, \text{ to } B = (\text{Nie } A) \text{ lub } B = \text{Nie } B, \text{ to } \text{Nie } A$ ?

	Jeśli A, to B	Nie A	Nie B	(Nie A) lub B	Nie B, to nie A
A=P, B=P					
A=P, B=F					
A=F, B=P					
A=F, B=F					

## KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

**Ad. 6.** Przykładowe zadania z pokazem techniki dochodzenia do rozwiązania (sposób notowania).

Zadanie o ustalaniu tożsamości

Podczas Halloween czworo przebierańców odwiedziło szkołę w Cork: wiedźma, goblin, duch i czarny kot. Każde z nich poszło do innego spośród pomieszczeń: klasa 2, klasa 3, klasa 4 oraz pokój nauczycielski. Wiadomo, że: goblin ukradł zeszyt, kot namalował swoje łapy, duch ukrył się w biurku, wiedźma zostawiła prezent. Dodatkowe wskazówki:

- Nic nie zostało ukradzione z klasy 4.
- Duch ukrył się albo w klasie 2 albo w pokoju nauczycielskim.
- Klasa 2 nie była odwiedzana przez goblina.
- Żadne zeszyty ani obrazki nie są trzymane w pokoju nauczycielskim.
- Czarny kot nie grasował w klasie 4.

Dokąd poszedł każdy z przebierańców?

	wiedźma	goblin	duch	kot
klasa 2	F	F	F	T
klasa 3	F	T	F	F
klasa 4	T	F	F	F
pokój nauczycielski	F	F	T	F

Zadanie o kłamcach

Inspektor Smart ze Scotland Yardu przeglądał protokoły przesłuchań trzech rabusiów. Zostało ustalone, że jeden z nich ukradł rolkę papieru toaletowego oraz że dokładnie jeden z podejrzanych mówi prawdę. Oto wypowiedzi podejrzanych:

- Albert: Jestem niewinny.
- Bill: Charles ukradł papier.
- Charles: Jestem niewinny.

Kto ukradł papier toaletowy? (Albert)

	A jest winny	B jest winny	C jest winny
A: Jestem niewinny.	F	P	P
B: Charles ukradł papier.	F	F	P
C: Jestem niewinny.	P	P	F

### UWAGI

1. Czas trwania wykładu 60 min. Czas pisania zadań 45 min.
2. Termin konkursu szkolnego: 24 XI (wykład może być wcześniej). Termin odesłania wyników: 30 XI. Finał 12 XII, godz. 10:15, sala HS Instytutu Matematycznego UWr (pl. Grunwaldzki 2/4, tel na portiernię 71 3757414).
3. Wyniki w pliku xls. Wzór do pobrania ze strony konkursu: <http://www.fmw.uni.wroc.pl/dla-uczni%C3%B3w/koma/2015/xi-konkurs-matematyczny-koma-2015>
4. W przypadku dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
5. Prac nie trzeba przysyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyień od średniej, możemy poprosić o przesłanie prac.
6. Każdy podpunkt z zadań 1-5 jest oceniany zero-jedynkowo. Zad. 6-12 są oceniane w skali 0-2 pkt.

## KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

### KLUCZ

**Zad. 1.** a) Lincoln, b) Cork, c) 200. urodzin, d) logika dwuwartościowa i spójniki logiczne I, LUB, NIE

**Zad. 2.** Zał: Ssaki zjadają swoje młode. Ludzie są ssakami.  
Wn: Ludzie zjadają swoje dzieci.

**Zad. 3.** T N T N T N N T N T

**Zad. 4.** T N T N T T N T N N T

**Zad. 5.** a) Słoń jest lekki lub kot duży.  
b) Marcin jest niższy od Wojtka lub tego samego wzrostu a/i Tomek jest wysoki c) Nel jest dobra lub ładna.  
d) Jan jest piękny i młody, a/i/ale jego

syn jest biedny. e) Będzie zimno i będę odpoczywał, i będę najedzony.

**Zad. 6.** a), c), f  
(1 pkt za 2, 2 pkt za 3 – błędne)

**Zad. 7.** Z, 5  
(+1+1 – błędne)

**Zad. 8.** a) Cindy, b) Belinda

**Zad. 9.** Bartek – zielony i towarzyski,  
Eryk – granatowy i leniwy,  
Marcin – amarantowy i potulny,  
Karol – purpurowy i groźny  
(po ¼ pkt)

**Zad. 10.** Black  
(0 lub 2)

**Zad. 11.** 0 1 1 0 1 0  
(1 błąd 1 pkt, więcej 0 pkt)

**Zad. 11.**

	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1

(0 lub 2)