

XXIII Mistrzostwa Polski w Geometrii Elementarnej
Wrocław, 7 VI 2025

Rozwiązanie każdego zadania zapisz na osobnej kartce opatrzonej imieniem i nazwiskiem oraz numerem zadania. Na rozwiązywanie zadań (niekoniecznie wszystkich) masz 3 godziny. Zakończenie rozwiązywania każdego z zadań zgłoś dyżurnemu jurorowi przez podniesienie ręki. POWODZENIA!

Zad. 1. W trapezie $ABCD$ o podstawach $|AB| = 14$ i $|CD| = 6$ przekątne AC i BD wraz z linią średnią trapezu ograniczają trójkąt o polu 4. Oblicz pole trapezu.

Zad. 2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$, a wysokość CH przecina okrąg przechodzący przez wierzchołki B i C oraz przez środek M boku AC w punkcie K . Wykaż, że $|CK| = \frac{3}{2}R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Zad. 3. Na odcinku AC obrano punkt B , a na odcinkach AB , BC i AC jako na średnicach zbudowano okręgi o_1 , o_2 i o_3 , o środkach odpowiednio O_1 , O_2 i O_3 . Przez punkt B poprowadzono prostą przecinającą okrąg o_3 w punktach P i Q , a okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio R i S . Wykaż, że $|PR| = |QS|$.

Zad. 4. W trójkącie ABC bok AB jest dłuższy od boku BC . Niech AK i CM będą dwusiecznymi kątów A i C . Wykaż, że $|AM| > |MK| > |KC|$.

Zad. 5. W kąt AOB wpisano dwa nieprzecinające się okręgi o_1 i o_2 . Niech M oznacza punkt styczności okręgu o_1 z ramieniem OA , a P – punkt styczności okręgu o_2 z ramieniem OB . Wykaż, że oba okręgi wycinają z prostej MP cięciwy jednakowej długości.

Zad. 6. W równoległoboku $ABCD$ mamy $|\angle BDC| = 45^\circ$ i $|\angle DBC| = 90^\circ$. Na boku AB obrano punkt K taki, że DK i AC są prostopadłe oraz $|KB| = 2$. Oblicz pole równoległoboku.

Zad. 7. Wewnątrz kąta AOB obrano punkt C . Niech D i E będą jego rzutami prostokątnymi odpowiednio na ramiona OA i OB . Z kolei N niech będzie rzutem prostokątnym punktu D na OB , a M – rzutem prostokątnym punktu E na OA . Wykaż, że OC i MN są prostopadłe.

Zad. 8. W trójkącie ABC mamy $|AC| = |BC|$ oraz $|\angle ACB| = 20^\circ$. Na bokach AC i BC obrano odpowiednio punkty Q i P takie, że $|\angle PAB| = 50^\circ$ i $|\angle ABQ| = 60^\circ$. Oblicz miarę kąta BQP .

Zad. 9. Na ostrokątnym trójkącie ABC opisano okrąg o średnicy AD . Przez ortocentrum trójkąta H poprowadzono prostą równoległą do boku BC , która przecięła boki AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Wykaż, że obwód trójkąta DEF jest dwa razy większy niż długość boku BC .

Zad. 10. Niech K oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $|AC| < |BC|$. Przez K prowadzimy styczną do okręgu opisanego na trójkącie ABK , przecinającą boki AC i BC odpowiednio w punktach M i N . Wiedząc, że $|MN| = 10$, oblicz $|AM| \cdot |BN|$.

Zad. 11. Na okręgu opisano trapez $ABCD$. Wiedząc, że kąt A jest prosty oraz że punkt przecięcia przekątnych jest oddalony od ramion AD i BC odpowiednio o 5 i 4, oblicz długość promienia okręgu.

Zad. 12. W trójkącie ABC mamy $|\angle CAB| = 90^\circ$, $|\angle ACB| = 36^\circ$ i $|BC| = 2$. Oblicz długość AC .