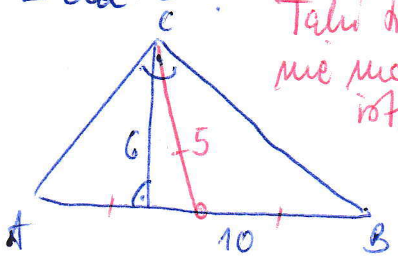
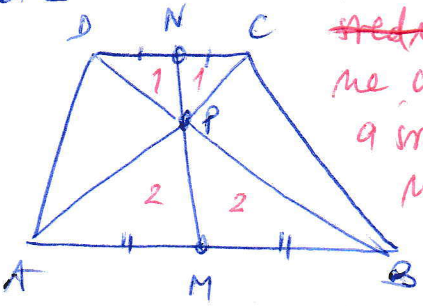
Zad. 1



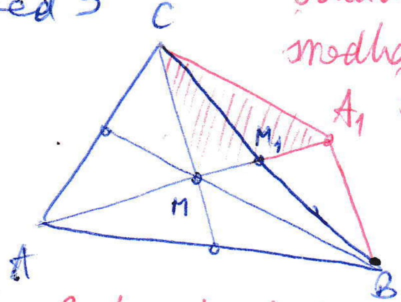
Taki trójkąt nie może istnieć

Zad 2



Zauważmy że linia ~~średnia~~ MN dzieli trapez na części o równych polach a środkowe PM i PN dzielą na pół odpowiednie trójkąty. Stąd teza

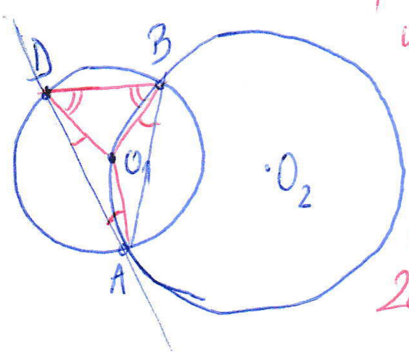
Zad 3



Oznaczmy środkowe przez m_a, m_b i m_c odpowiednio. Przedłużmy środkową AM_1 do punktu A_1 takiego że $MM_1 = A_1M_1$. Z własności środka ciężkości M mamy $CM = \frac{2}{3}m_c$, $MA_1 = AM = \frac{2}{3}m_a$ oraz $CA_1 = MB = \frac{2}{3}m_b$ stąd $m_c = \frac{3}{2}CM$, $m_a = \frac{3}{2}MA_1$ i $m_b = \frac{3}{2}CA_1$. Dalej $S_{CMA_1} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ z własności środka ciężkości.

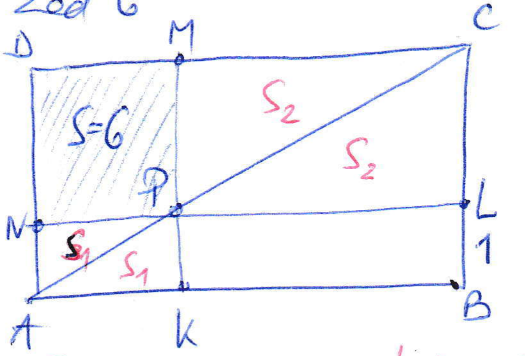
Zatem trójkąt o bokach równych środkowym jest podobny w skali $k = \frac{3}{2}$ do trójkąta CMA_1. Stąd $S_{m_a m_b m_c} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$

Zad 4



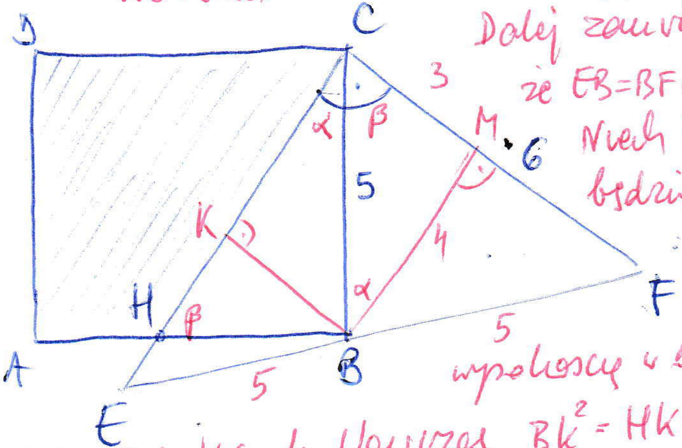
Zauważmy że trójkąty DO_1B, DO_1A oraz ABO_1 są równoramienne. Wystarczy zauważyć że kąt dopisany $\sphericalangle DAO_1 = \sphericalangle O_1BA$. Stąd $\sphericalangle ADO_1 = \sphericalangle O_1BA$ i ostatecznie $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD$. Zatem $AD = AB$.

Zad 6



$S_{KBLP} = S_{NPMD} = 6$ stąd $MC = 6$

Zad 5

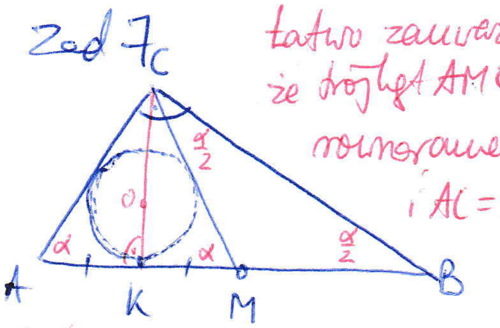


Prowadzimy linię średnią BM wówczas $CM = 3$ i $BM = 4$. Dalej zauważmy że $EB = BF = 5$. Niech BK będzie wysokością w ΔHBC.

Mamy $BK = 3$ i $KC = 4$. Wówczas $BK^2 = HK\cdot KC$ stąd $HK = \frac{9}{4}$ i $HC = \frac{25}{4}$. Zatem $S_{HBC} = \frac{75}{8}$ i ostatecznie $S_{AHCD} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}$.

II wariant łatwo zauważyć że $\Delta HBC \sim \Delta BMC$ w skali $k = \frac{5}{4}$ stąd $S_{HBC} = \frac{25}{16}\cdot S_{BMC} = \frac{25}{16}\cdot 6 = \frac{75}{8}$.

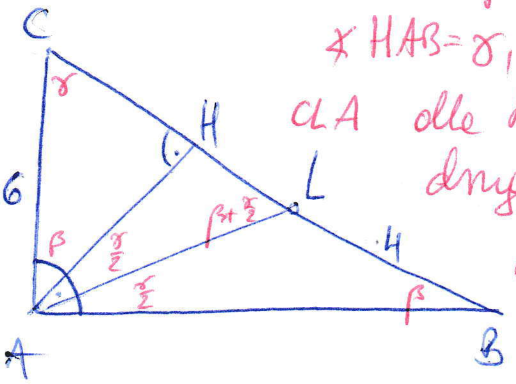
Zad 7



Łatwo zauważyć że trójkąt AMC jest równoramienny i $AC = MC$.

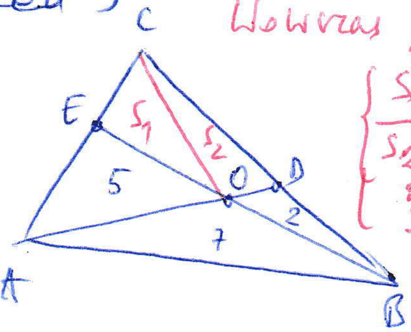
Wówczas $\sphericalangle CAM = \sphericalangle AMC = 2\cdot\sphericalangle ABC$ stąd $\frac{3}{2}\alpha = 90$. Zatem $\alpha = \sphericalangle CAB = 60°$ i $\sphericalangle ABC = 30°$

Zad 8



Oznaczmy $\sphericalangle ACB=\gamma$ i $\sphericalangle ABC=\beta$. Wówczas $\sphericalangle CAH=\beta$, $\sphericalangle HAB=\gamma$, $\sphericalangle HAL=\sphericalangle LAB=\frac{\gamma}{2}$. Dalej kąt zewnętrzny CLA dla trójkąta ALB więc mamy $\sphericalangle CLA=\beta+\frac{\gamma}{2}$. Z drugiej strony $\sphericalangle CAL=\beta+\frac{\gamma}{2}$ stąd trójkąt ALC jest równoramienny i $CL=6$. Zatem $BC=10$ i $AB=8$ oraz $S_{ABC}=24$

Zad 9



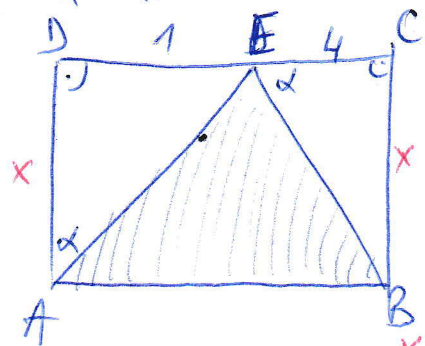
Oznaczmy $S_{EOC}=S_1$ i $S_{COD}=S_2$. Wówczas mamy

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S_2+2}=\dfrac{5}{7} \\ \dfrac{5+S_1}{S_2}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

stąd $S_1=\frac{40}{13}$, $S_2=\frac{30}{13}$ i

$$S_{EODC}=\frac{70}{13}$$

Zad 10

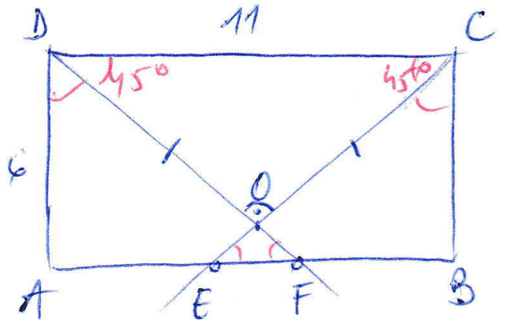


niech $AD=x$

$\triangle AED \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{4}{x} \Rightarrow x=2$

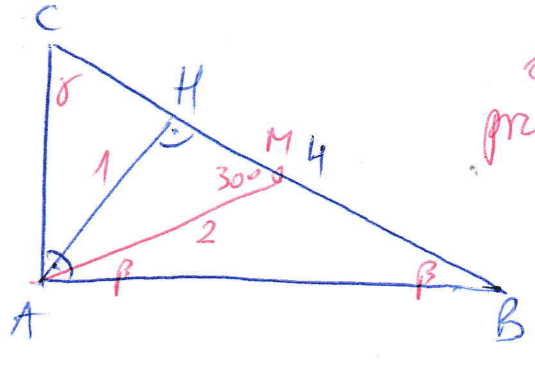
$S_{ABE}=5$

Zad 11



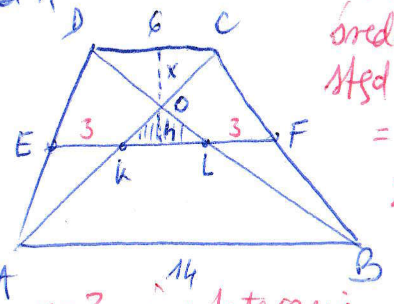
Łatwo zauważyć że trójkąty AFD oraz EBC są równoramienne stąd $AF=EB=6$. Zatem $FB=AE=5$ i ostatecznie $EF=1$

12



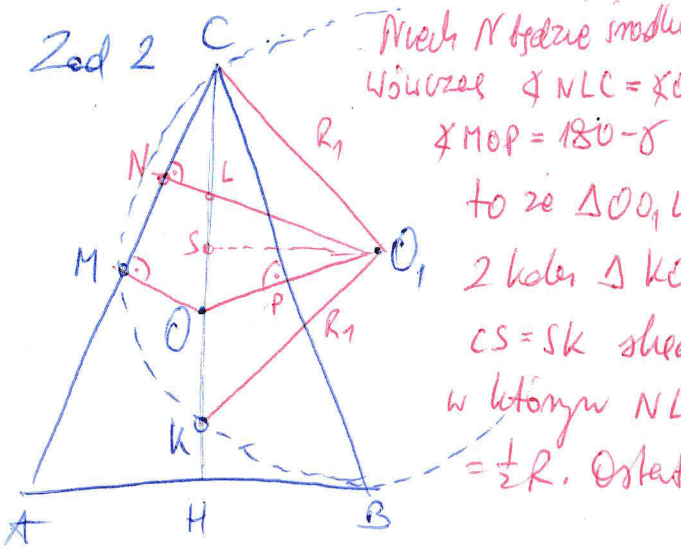
Niech AH będzie wysokością. Wówczas $\frac{1}{2}AH\cdot 4=2$ stąd $AH=1$. Niech M będzie środkiem przeciwprostokątnej. Wówczas $AM=2=\frac{1}{2}BC$ zatem trójkąt AMH jest „ekierkowy" i $\sphericalangle AMH=30^\circ$. Z. że $\sphericalangle AMH$ jest zewnętrzny dla trójkąta równoramiennego ABM stąd $30^\circ=2\beta$. Zatem $\beta=15^\circ$, $\gamma=75^\circ$

Zad 1



$3 = EK = LF$ jako linie średnie w ΔACD i ΔBCD. Stąd $KL = EF - 6 = \frac{1}{2}(14+6) - 6 = 4$ stąd $h = 2$. Z podobieństwa trójkątów DOC i KLO mamy $\frac{h}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 3$ i ostatecznie $S_{\square} = \frac{1}{2}(14+6)\cdot 2(x+h) = 100$

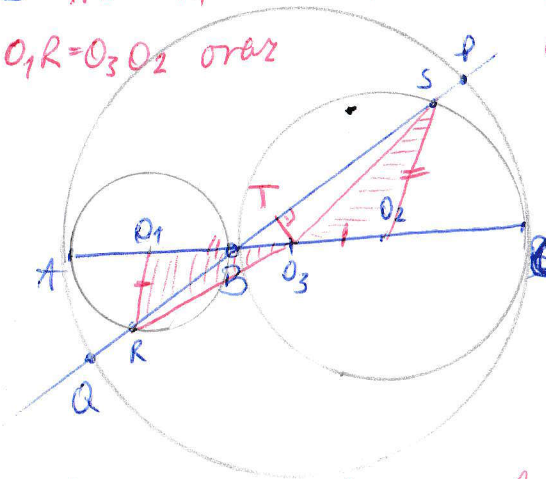
Zad 2



Niech N będzie środkiem odcinka MC i S środkiem CK. Wówczas $\measuredangle NLC = \measuredangle OLO_1 = 90 - \frac{\gamma}{2}$ i z drugiej strony $\measuredangle MOP = 180 - \gamma$ stąd $\measuredangle LOO_1 = 90 - \frac{\gamma}{2}$. Oznacza to że ΔOO_1L jest równoramienny i $LS = SO$. Z kolei ΔKO_1C też jest równoramienny i $CS = SK$ stąd $OK = CL$. Rozważmy ΔMOC, w którym NL jest linią średnią i $CL = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$. Ostatecznie $CK = CO + OK = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$

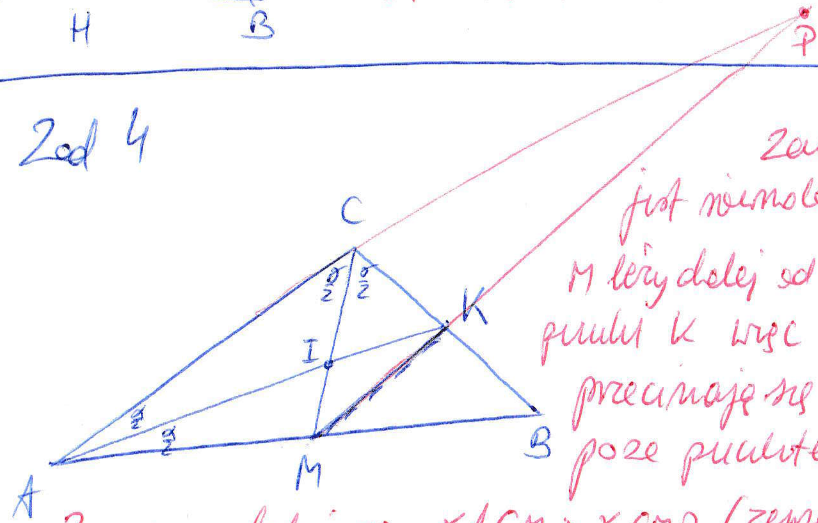
Zad 3

Niech R_1, R_2 i R_3 promienie. Zauważmy że $AC = 2R_1 + 2R_2 = 2R_3$ stąd $R_1 = R_3 - R_2$ i $R_2 = R_3 - R_1$. Zatem $O_1R = O_3O_2$ oraz $O_1O_3 = O_2S$.



Zauważmy teraz że równe są kąty ABR i PBC wpisane w okręgi O_1 i O_2 stąd $\measuredangle AO_1R = \measuredangle SO_2C$ i dalej $\measuredangle RO_1O_3 = \measuredangle O_3O_2S$. Oznacza to że trójkąty RO_3O_1 i O_3O_2S są przystające i $O_3S = O_3R$. Niech T oznacza środek odcinka QP. Jest on jednocześnie środkiem odcinka RS stąd mamy tezę.

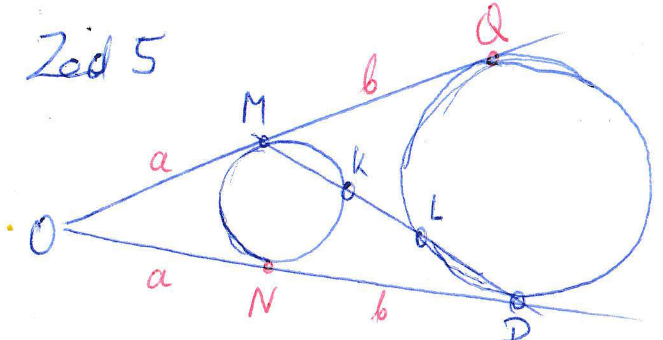
Zad 4



Zauważmy że AC nie jest równoległa do MK i M leży dalej od prostej AC niż punkt K więc proste AC i MK przecinają się w punkcie P poza punktem C.

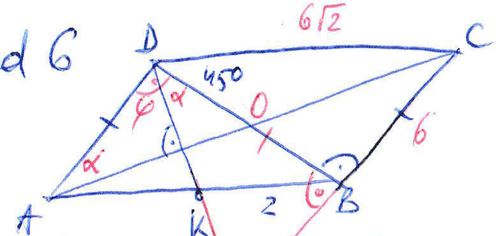
Zauważmy dalej że $\measuredangle ACM > \measuredangle CMP$ (zewnętrzny dla ΔCMP) stąd w trójkącie CMK mamy $\underline{MK > CK}$ (dłuższy bok naprzeciw większego kąta). Z kolei $\measuredangle MKA > \measuredangle KAM$ ponieważ $\measuredangle AIC = \measuredangle MIK$ a $\measuredangle ACI > \measuredangle IMK$. Stąd $\underline{AM > MK}$.

Zad 5



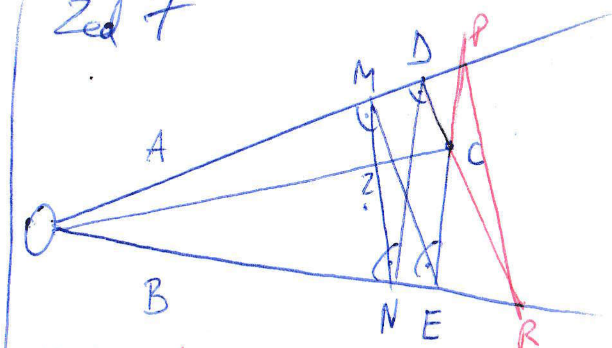
Oznaczmy jak na rysunku. Z tw. o stycznej i siecznej mamy $PN^2 = PK \cdot PM$ oraz $MQ^2 = ML \cdot MP$. Dzieląc stronami otrzymujemy $ML = PK$. Odejmując od obu odcinków KL mamy tezę.

Zad 6



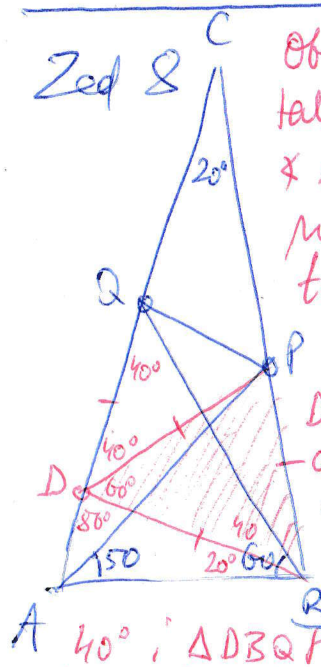
Przedłużmy DK i CB do przecięcia się w punkcie F. Zauważmy że $\sphericalangle DAO = \sphericalangle EAB$ (bo oba uzupełniają φ do kąta prostego) stąd wynika że trójkąty AOD i DEB są przystające (kbk) i $DO = \frac{1}{2}AD = EB$. Dalej łatwo zauważyć podobieństwo trójkątów AKD i KEB w skali $k=2$. Stąd $AK = 2 \cdot KB = 4$ i $AB = 6$. Ostatecznie $S_{ABCD} = 18$

Zad 7



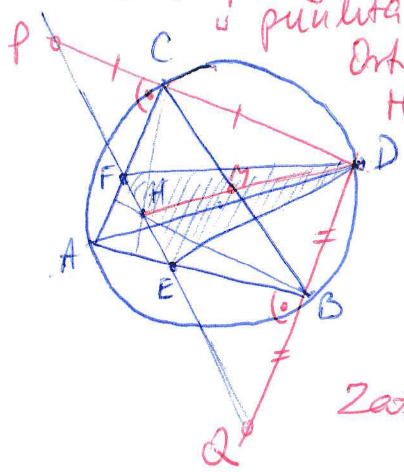
Niech prosta EC przecina OA w punkcie P, a prosta CD przecina OB w punkcie R. Zauważmy że punkt C jest ortocentrum w ΔORP. Wystarczy wykazać że $MN \parallel PR$. 2. że ΔONM jest trójkątem spodkowym dla ΔOED przy czym $\sphericalangle ONM = \sphericalangle ODE$ i $\sphericalangle OMN = \sphericalangle OED$. Z kolei trójkąt OED jest spodkowym dla ΔORP przy czym $\sphericalangle OED = \sphericalangle OPR$. Zatem $\sphericalangle OMN = \sphericalangle OPR$ stąd $MN \parallel PR$

Zad 8



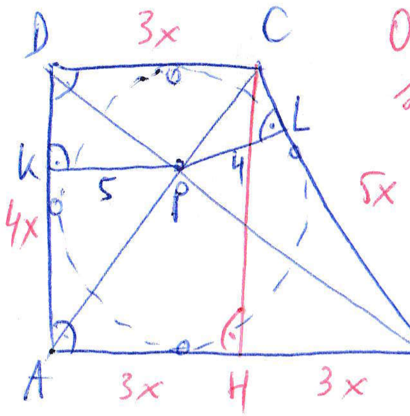
Obierzmy na AC punkt D taki że $\sphericalangle ABD = 20^\circ$. Wówczas $\sphericalangle ADB = 80$ i ΔABD jest równoramienny i $AB = DB$. Łatwo zauważyć że $\sphericalangle APB = 50^\circ$ i $AB = PB = DB \Rightarrow$ trójkąt DBP jest równoramienny a wobec $\sphericalangle DBP = 60^\circ$ nawet równoboczny. Dalej $\sphericalangle QDB = 100^\circ$, $\sphericalangle DBQ = 40^\circ \Rightarrow \sphericalangle DQB = 40^\circ$ i ΔDBQ jest równoramienny $DB = DQ$. Zatem ΔDPQ jest też równoramienny i $\sphericalangle DQP = 70^\circ$ stąd $\sphericalangle BQP = 30^\circ$

Zad 9



Niech prosta EF przecina się z prostymi DC i DB w punktach P i Q. Ortocentrum H i punkt D są symetryczne względem środka boku BC stąd BC jest linią średnią w ΔPQD czyli $PC = CD$ oraz $QB = BD$. Zauważmy teraz że $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = 90^\circ$ stąd $PF = FD$ i $EQ = ED$. Zatem $FD + FE + ED = PQ = 2 \cdot BC$.

Zad 11

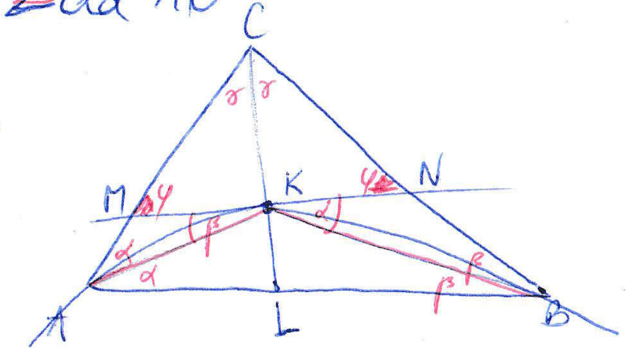


Z. że $S_{APD} = S_{PBC}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}DA \cdot 5 = \frac{1}{2}BC \cdot 4 \Rightarrow DA = \frac{4}{5}BC$.

Oznaczmy $AD = 4x$ i $BC = 5x$. Niech CH będzie wysokością trapezu, wówczas z tw. Pitagorasa w ΔCHB mamy $HB = 3x$. W trapez można wpisać okrąg więc $DC + AB = 9x$ stąd $AH = DC = 3x$. Oznacza to, że $AC = 5x$. Z podobieństwa trójkątów DPC i ABP w skali $k = \frac{1}{2}$ mamy $\frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$

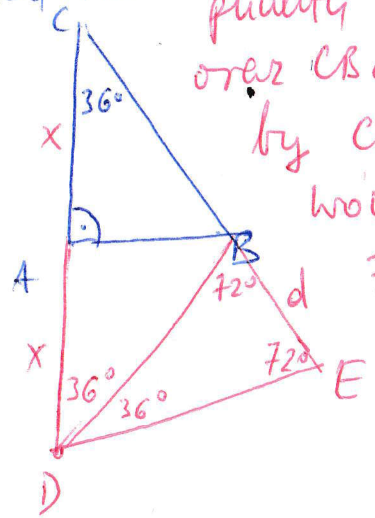
stąd $AP = \frac{2}{3}AC$. Z podobieństwa trójkątów (lub z Talesa) ACD i APK mamy $\frac{3x}{5} = \frac{AC}{\frac{2}{3}AC}$ stąd $x = \frac{5}{2}$. Ostatecznie $AD = 2R = 4x = 10$ stąd $R = 5$.

Zad 10



$\sphericalangle MKA = \sphericalangle KBA$ oraz $\sphericalangle NKB = \sphericalangle KAB$ stąd $\Delta AMK \sim \Delta KBN \sim \Delta AKB$ i $\sphericalangle AMK = \sphericalangle KNB$ stąd $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM$ a zatem $CM = CN$. Uwzględniając że CK jest dwusieczną mamy $MK = KN = 5$. Z podobieństwa trójkątów AMK i KBN mamy $\frac{AM}{MK} = \frac{KN}{NB}$ stąd $AM \cdot BN = 25$

Zad 12



Przedłużmy CA do punktu D tak by $CD = 2 \cdot CA$ oraz CB do punktu E tak by $CE = CD$. Mamy wówczas $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED = 72°$. Zauważmy że $\sphericalangle ADB = 36°$ bo $\Delta CAB = \Delta ADB$. Zatem ΔDEB jest równoramienny i $DE = DB$. Oznaczmy $BE = d$. Z podobieństwa trójkątów CDE i DEB otrzymujemy proporcję $\frac{d}{2} = \frac{2}{d+2}$ stąd $d = \sqrt{5} - 1$. Ostatecznie $2x = \sqrt{5} - 1 + 2$ stąd $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.