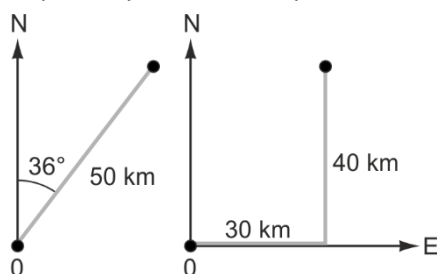


BIEGUNOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH – NOTATKI DO WYKŁADU

- 1) Kodowanie położenia na prostej i płaszczyźnie.
- 2) Układ biegunowy i prostokątny na płaszczyźnie. Przeliczanie współrzędnych.
- 3) Równania i nierówności w układach współrzędnych.
- 4) Równania biegunowe prostych i kół. Równania innych linii.

Ad. 1. Położenie punktu na prostej. Prosta ma tylko jeden wymiar. Aby określić położenie na prostej, trzeba wybrać punkt odniesienia tzw. **punkt zerowy**, od którego mierzymy wszystkie odległości. Położenie dowolnego punktu jest opisane przez odległość od 0 i kierunek od 0 (jeśli punkt leży na prawo – oznaczamy go liczbą dodatnią, a jeśli na lewo – ujemną), czyli do określenia położenia dowolnego na prostej wystarczy jedna liczba. Nazywamy ją **współrzedną** punktu. Współrzędne **wypełniają całą oś** (ułamki, liczby niewymierne). Punkt zerowy ma współrzedną (0).

Położenie punktu na płaszczyźnie. Płaszczyzna ma dwa wymiary. Aby określić położenie na płaszczyźnie, trzeba ustalić **jeden punkt i jeden kierunek**. Można to zrobić na różne sposoby. Nazywamy je **układem współrzędnych** na płaszczyźnie. Zawsze potrzebne są dwie liczby (współrzedne), aby określić położenie dowolnego punktu.



a) ustalony punkt zerowy (biegun) oraz kierunek „na północ” od tego punktu; współrzedne B to (50, 36) tzn. azymut 36° od kierunku północnego i odległość 50 km od punktu zerowego

b) ustalony punkt zerowy oraz kierunki na północ i na wschód od tego punktu; współrzedne B to (30, 40) tzn. 30 km na wschód od punktu zerowego i 40 km na północ

Ad. 2. Układy współrzędnych na płaszczyźnie: prostokątny i biegunowy

Podobnie jak zaznaczamy punkty na płaszczyźnie z układem prostokątnym można zaznaczać je w układzie biegunowym.

- a) **prostokątny**: osie pionowa i pozioma, współrzedne ujemne i dodatnie ozn. (x, y) , punkt zerowy ma współrzedne $(0, 0)$
- b) **biegunowy**: oś **pozioma**, pierwsza współrzedna dodatnia, kąt dodatni mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara ozn. (r, α) , punkt zerowy ma współrzedne $(0, 0)$, ale brak jednoznaczności $(0, 0) = (0, 30)$ lub $(1, 10) = (1, 370)$. **Uwaga! Nie oznaczamy stopni we współrzednych, nie wprowadzamy r ujemnych, ujemne kąty mierzymy od osi w dół (zegarowo).**

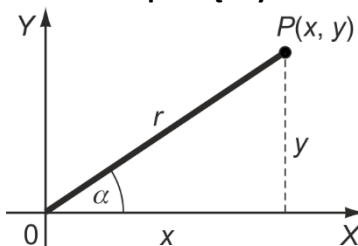
Uwaga! Przed wykładem warto narysować na tablicy kilka układów biegunowych z kratą linii (jak w zadaniach).

Ćwiczenie. Punkty podane we współrzednych kartezjańskich podaj we współrzednych biegunowych i na odwrót.

- a) układ prostokątny: $(0, 3)$, $(5, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$
- b) układ biegunowy: $(1, 45)$, $(3, 90)$, $(2, 60)$, $(2, 120)$, $(3, 180)$, $(4, 270)$, $(3, 330)$, $(2, 390)$

Jakie współrzedne biegunowe ma punkt o współrzednych prostokątnych $(4, 2)$? Geometrycznie to biegunowo punkt $(\sqrt{20}, \text{tg}^{-1}(1/2))$.

Zamiana współrzednych **Uwaga! Przypomnieć nazwy proporcji trygonometrycznych w trójkącie.**



współrzedne prostokątne (x, y) oraz biegunowe (r, α)

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(y/x)$$

Ad. 3. Układy współrzędnych wprowadza się po to, aby geometryczne kształty opisywać algebraicznie przez równania i nierówności.

Ćwiczenie. Co to za miejsca na płaszczyźnie z układem prostokątnym? a) $x = 3$, b) $y = -2$, c) $2 < x < 4$, d) $y \geq 5$, e) $y = 2$ lub $x = 3$, f) $y = 2$ i $y = 3$, g) $x = 2$ lub $x = 3$ i $y = 7$.

Odp. a) prosta pionowa, b) prosta pozioma, c) pas pionowy bez brzegu, d) półpłaszczyzna z brzegiem, e) dwie proste, f) zbiór pusty, g) dwa punkty

Ćwiczenie. Co to za miejsca na płaszczyźnie z układem biegunowym? a) $r = 2$, b) $\alpha = 30^\circ$, c) $2 < r < 4$, d) $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
e) $\alpha = 30^\circ$ i ($1 < r < 2$ lub $4 < r < 5$), f) $r = 2$ lub ($3 < r < 4$ i $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$)

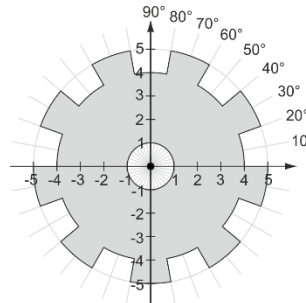
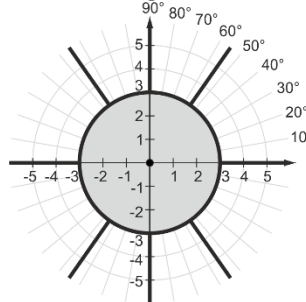
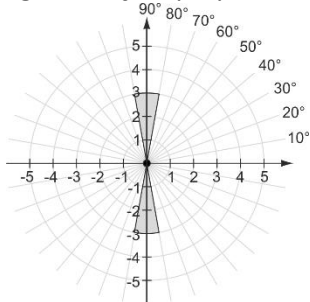
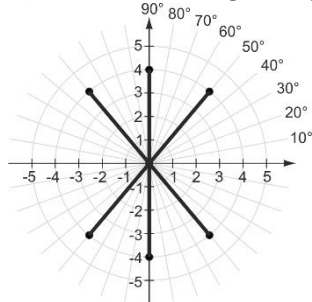
Odp. a) okrąg, b) półprosta, c) pierścień bez brzegu, d) kąt z ramionami, e) dwa odcinki, f) okrąg i łuk

Uwaga! Rola spójników. Można je pisać słowami lub symbolami. Trzeba ustalić konwencję jak zaznaczać należenie i nienależenie brzegu (puste punkty, linie przerywane).

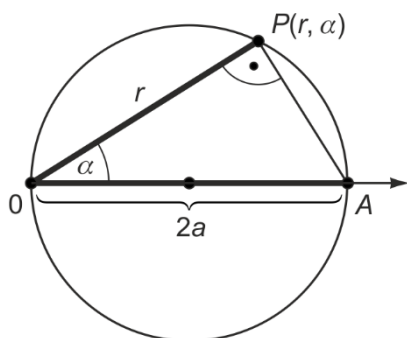
Ćwiczenie. Opisać warunkami narysowane figury.

a) w układzie prostokątnym: prostokąt (różne warianty brzegu)

b) w układzie biegunowym: gwiazdkę z 4 patyków o ramionach długości 3



Ad. 4. Równanie okręgu o środku w $(0, 0)$ w układzie prostokątnym to (z twierdzenia Pitagorasa) $x^2 + y^2 = c$, promień okręgu to $\sqrt{c}$. W układzie biegunowym to równanie jest znacznie prostsze: $r = \sqrt{c}$. Ten sam okrąg przesunięty tak, że jego środek jest w $S(a, 0)$ ma równanie w układzie prostokątnym $(x-a)^2 + y^2 = c$. A w układzie biegunowym? Średnica leży na osi układu i niech wynosi $2a$ (tzn. okrąg przechodzi przez O).



Jeśli P jest punktem na okręgu, to trójkąt OPA jest prostokątny.

$$r = 2a \cos \alpha$$

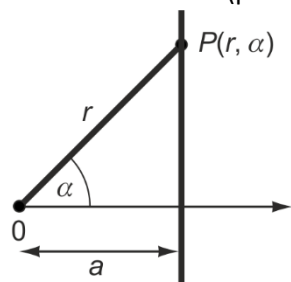
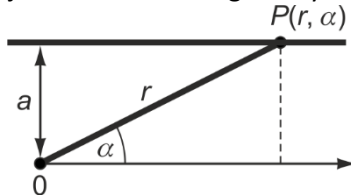
Ćwiczenie. Podaj równanie okręgu $r = 2a \cos \alpha$ we współrzędnych prostokątnych.

a) geometrycznie z położenia środka

b) mechanicznie z zależności na zamianę współrzędnych

Mamy: $x = r \cos \alpha$ i $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, czyli $\cos \alpha = x/r$ i $r^2 = x^2 + y^2$. Podstawiamy do równania biegunowego okręgu: $r = 2a \cos \alpha = 2a(x/r)$, czyli $r^2 = 2ax$. I dalej $x^2 + y^2 = 2ax$, czyli $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, czyli $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Równania prostych w układzie prostokątnym: $y = ax$ (przez początek układu), $y = c$ (pozioma), $x = c$ (pionowa). A jak jest w układzie biegunowym? $\alpha = c$ lub $\alpha = c + 180^\circ$ (prosta przez początek układu)



prosta pozioma

$$a/r = \sin \alpha, \text{ czyli } r = a/\sin \alpha$$

prosta pionowa

$$a/r = \cos \alpha, \text{ czyli } r = a/\cos \alpha$$

II część wykładu (po konkursie, z komputerem)

Rysowanie ciekawych krzywych opisanych biegunowo (elipsa, spirale zwijające, kardioida, wielopłatki). Próby zgadywania kształtu (np. cos jest parzysty, więc równanie z kosinusem ma wykres symetryczny względem osi układu), eksperymenty z parametrem.

$$r = a\alpha, r = 2a \cos 2\alpha, r = a \cos 3\alpha, r^2 = a^2 \sin 2\alpha, r^2 = a^2 \cos 2\alpha, r = a + b \cos \alpha,$$

imię i nazwisko: WZOR2EC ODPowiedziszkoła: MAX = 51 pkt.**Zad. 1.** Podaj współrzędne biegunowe następujących punktów w prostokątnym układzie współrzędnych.

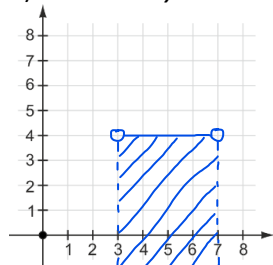
- A (0, 3) (3, 90)
 B (-4, 2) (2√5, 180 - tg⁻¹(1/2))
 C (-3, 0) (3, 180)
 D (-2, -2) (2√2, 225)
 E (4, -2) (2√5, -tg⁻¹(1/2))

Zad. 2. Podaj współrzędne prostokątne następujących punktów w biegunowym układzie współrzędnych.

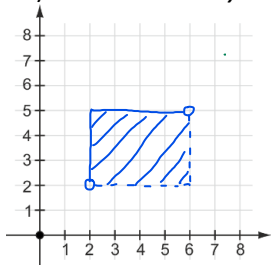
- A (5, 45) (5√2/2, 5√2/2)
 B (2, 90) (0, 2)
 C (4, 270) (0, -4)
 D (5, 450) (0, 5)
 E (3, 720) (3, 0)

Zad. 3. Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych figury opisane podanymi warunkami.

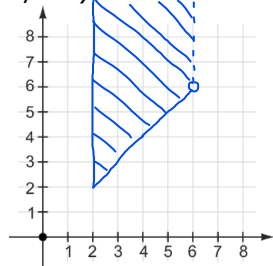
a) $3 < x < 7$ i $y \leq 4$



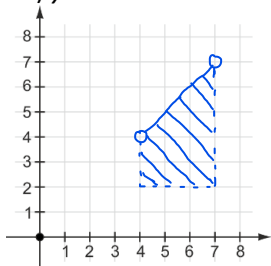
b) $2 \leq x < 6$ i $2 < y \leq 5$



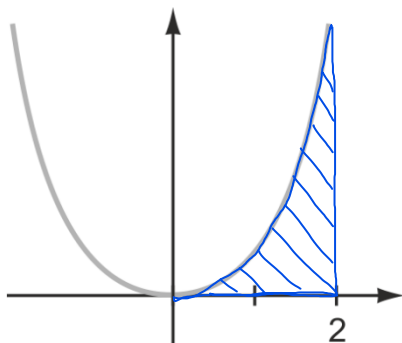
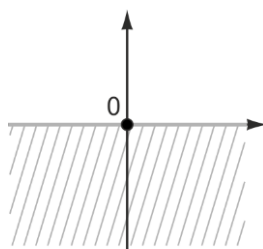
c) $x \leq y$ i $6 > x \geq 2$



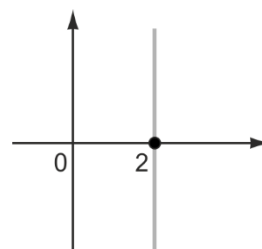
d) $y > 2$ i $7 > x > 4$ i $x \geq y$



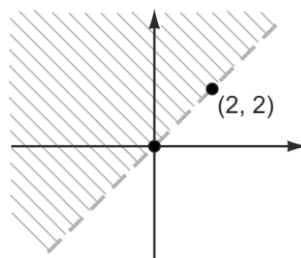
Zad. 4. Zaciemnij obszar, który spełnia podane warunki:
 $0 \leq x \leq 2$
 i $y \geq 0$
 i $y \leq x^2$.

**Zad. 5.** Opisz odpowiednimi warunkami poniższe figury na płaszczyźnie z układem prostokątnym.

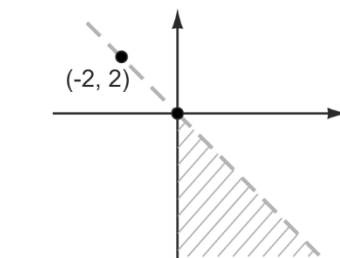
a) $y \leq 0$



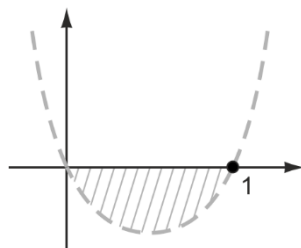
b) $x = 2$



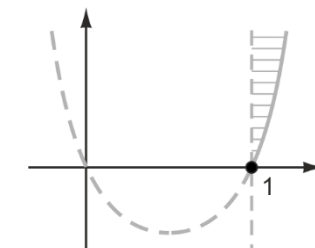
c) $y > x$



d) $0 < x < -y$

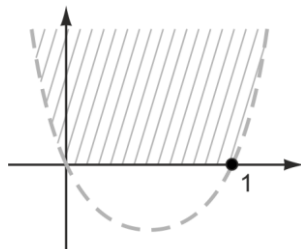


e) $x(x-1) < y < 0$

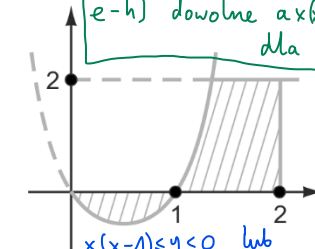


f) $y \geq x(x-1)$ i $x > 1$

e-h) dowolne $a < x < 1$
 dla $a > 1$



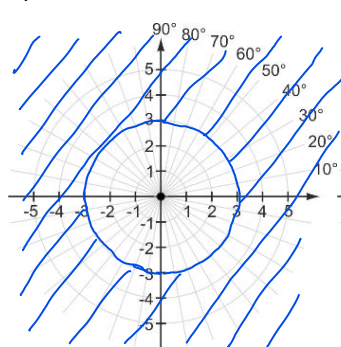
g) $y > x(x-1)$ i $y > 0$



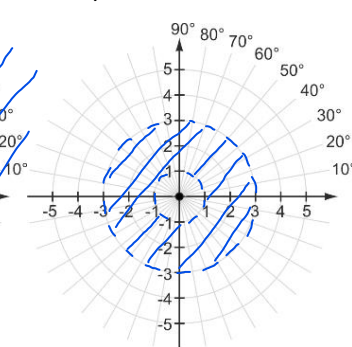
h) $x(x-1) \leq y < 0$ lub $1 \leq x \leq 2$ i $0 < y \leq 2$ i $y \leq x(x-1)$

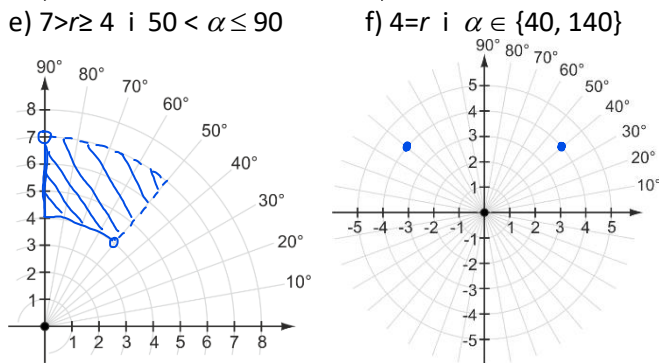
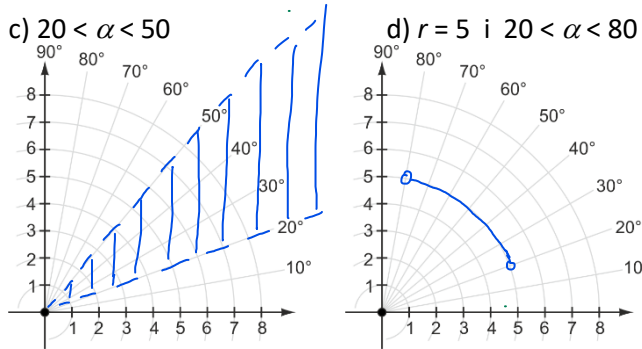
Zad. 6. Zaznacz w biegunowym układzie współrzędnych figury opisane podanymi warunkami.

a) $r \geq 3$

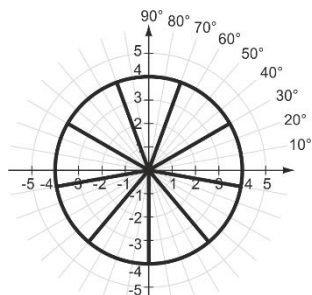


b) $1 < r < 3$



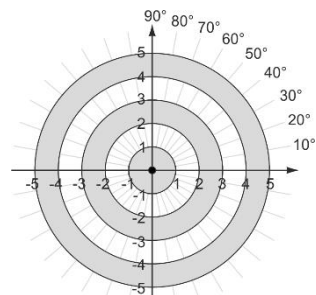


Zad. 7. Opisz odpowiednimi warunkami poniższe figury na płaszczyźnie z układem biegunowym.

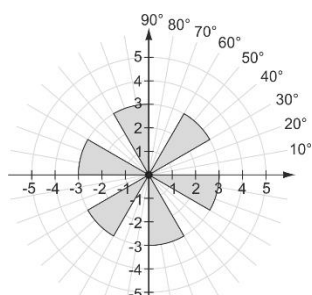


a) $r = 4$ lub
 $(r \leq 4 \text{ i } \alpha \in \{30, 70, 110, 150, 190, 230, 270, 310, 350\})$

MOŻNA TEŻ $r = 4$ lub $(r < 4 \text{ i } \alpha = 40k + 30, k \in \mathbb{Z})$

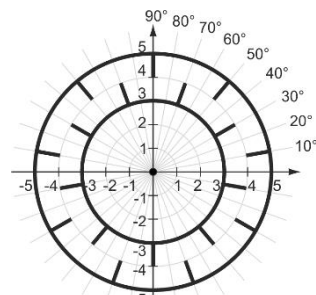


b) $r \leq 1$ lub $2 \leq r \leq 3$ lub $4 \leq r \leq 5$



c) $r \leq 3$ i $(30 \leq \alpha \leq 60 \text{ lub } 90 \leq \alpha \leq 120 \text{ lub } 150 \leq \alpha \leq 180 \text{ lub } 210 \leq \alpha \leq 240 \text{ lub } 270 \leq \alpha \leq 300 \text{ lub } 330 \leq \alpha \leq 360)$

MOŻNA TEŻ $r \leq 3$ i $\alpha \in [60k + 30, 60k + 60], k \in \mathbb{Z}$



d) $r \in \{3, 5\}$ lub
 $(r \in [1, 5] \text{ i } \alpha \in \{10, 50, 90, 130, 170, 210, 250, 290, 330\})$ lub
 $(r \in [3, 4] \text{ i } \alpha \in \{30, 70, 110, 150, 190, 230, 270, 310, 350\})$

MOŻNA TEŻ
 $r \in \{3, 5\}$ lub $(r \in [1, 5] \text{ i } \alpha = 40k + 10)$
 lub $(r \in [3, 4] \text{ i } \alpha = 40n + 30), k, n \in \mathbb{Z}$

Zad. 8. Podaj równania biegunowe osi układu prostokątnego.

OX $\alpha = 0$ lub $\alpha = 180$

OY $\alpha = 90$ lub $\alpha = 270$

Zad. 9. Podaj równania biegunowe linii o danych równaniach we współrzędnych prostokątnych.

a) $y = x$ $\alpha = 45$ lub $\alpha = 225$

b) $y = x^2$ $r = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$

c) $y^2 = 4x$ $r = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$

d) $xy = 4$ $r^2 = \frac{4}{\sin \alpha \cos \alpha}$

e) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ $r^2 + a^2 = 2ar(\cos \alpha + \sin \alpha)$

Zad. 10. Podaj równania we współrzędnych prostokątnych linii o danych równaniach biegunowych.

a) $r = 6$ $x^2 + y^2 = 36$

b) $r = 2 \cos \alpha$ $(x-1)^2 + y^2 = 1$

c) $r^2 = 4 \sin(2\alpha)$ $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

d) $r = 3/\sin \alpha$ $y = 3$

e) $r = 4/\cos \alpha$ $x = 4$

Zad. 11. Opisz słowami, jak wygląda figura spełniająca podane warunki w układzie biegunowym.

a) $0 < \alpha \leq 3600$ i $r = \alpha:10$ (2 pkt.)
 spirala

rozwijająca się

10 obrotów

b) $10 < \alpha$ i $r = 10:\alpha$ (2 pkt.)
 spirala

zwijająca się

∞ - wiele obrotów

3 prawidłowe odpowiedzi: 2 pkt.
 2 -/- - 1 pkt.

c) $r = 3 \sin(5\alpha)$ (2 pkt.)

- kwiatek
- 5 płatków
- o długości 3