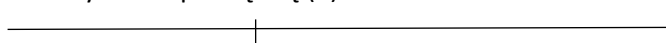


FINAŁ SP
UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH – NOTATKI DO WYKŁADU

- 1) Położenie na prostej. Oś liczbowa. Równania i nierówności.
- 2) Położenie na płaszczyźnie. Układ biegunowy i prostokątny. Równania i nierówności
- 3) (LO) **Przeliczanie współrzędnych.**
- 4) (LO) **Krzywe w układzie biegunowym**
- 5) (LO) **Położenie w przestrzeni. Układ biegunowy i prostokątny. Równania i nierówności.**
- 6) (LO) **Położenie na okręgu, walcu, sferze.**

Ad. 1. Położenie na prostej. Liniaki mieszkają na prostej. Prosta ma tylko jeden wymiar. Aby określić położenie na prostej, trzeba wybrać punkt odniesienia tzw. **punkt zerowy**, od którego mierzymy wszystkie odległości. Położenie dowolnego punktu jest opisane przez odległość od 0 i kierunek od 0 (jeśli punkt leży na prawo – oznaczamy go liczbą dodatnią, a jeśli na lewo – ujemną), czyli do określenia położenia dowolnego na prostej wystarczy jedna liczba. Nazywamy ją **współrzedną** punktu. Współrzedne **wypełniają całą oś** (ułamki, JUN liczby niewymierne). Punkt zerowy ma współrzedną (0).

rys. osi liczbowej

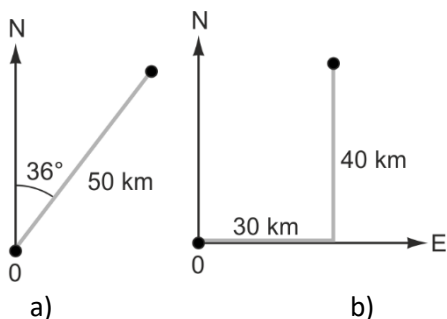


Ćwiczenie. Co to za miejsca na prostej? a) $A = (5)$, $B = (-7)$, b) $P \in \{(3), (-2), (5)\}$, c) $-2 < x < 3$, $x > 7$, $x = -2$.

Odp. a) A, B – oznaczają konkretne punkty o ustalonej współrzednej, b) P oznacza ogólnie jakiś punkt z zadanego zbioru, c) x oznacza zmieniającą się liczbę (współrzedną punktu), co daje odcinek, półprostą, punkt.

Ad. 2. Położenie na płaszczyźnie. Płaszczaki mieszkają na płaszczyźnie. Płaszczyzna ma dwa wymiary. Aby określić położenie na płaszczyźnie, trzeba ustalić **jeden punkt i jeden kierunek**. Można to zrobić na różne sposoby. Każdy z nich nazywamy **układem współrzędnych** na płaszczyźnie i zawsze potrzebne są dwie liczby (współrzedne), aby określić położenie dowolnego punktu.

rys. kodowanie położenia współrzednymi prostokątnymi i biegunowymi



a) ustalony punkt zerowy (biegun) oraz kierunek „na północ” od tego punktu; współrzedne B to (50, 36) tzn. azymut 36° od kierunku północnego i odległość 50 km od punktu zerowego

b) ustalony punkt zerowy oraz kierunki na północ i na wschód od tego punktu; współrzedne B to (30, 40) tzn. 30 km na wschód od punktu zerowego i 40 km na północ

Układy współrzędnych: prostokątny i biegunowy

a) osie pionowa i pozioma, współrzedne ujemne i dodatnie ozn. (x, y) , punkt zerowy ma współrzedne $(0, 0)$

b) oś pozioma, pierwsza współrzedna dodatnia, kąt dodatni mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara ozn. (r, α) , punkt zerowy ma współrzedne $(0, 0)$, ale brak jednoznaczności $(0, 0) = (0, 30)$ lub $(1, 10) = (1, 370)$.

Uwaga! W SP nie oznaczamy stopni we współrzednych i nie wprowadzamy r ani α ujemnych.

Uwaga! Przed wykładem warto narysować na tablicy (i zasłonić) kilka układów prostokątnych i biegunowych z kratą linii (jak w zadaniach). Można też rzucić takie obrazki na ekran, ale koniecznie rysować na nich na żywo (z tabletem graficznym – mam 1 sztukę).

Ćwiczenie. Zaznacz na płaszczyźnie punkty w odpowiednim układzie:

a) prostokątnym: $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 4)$, $(-1, 5)$, $(3, -4)$, $(-2, -3)$, $(0, 3)$, $(5, 0)$, $(0, 0)$ **JUN: tylko pro forma**

b) biegunowym: $(1, 45)$, $(3, 90)$, $(2, 120)$, $(3, 180)$, $(4, 270)$, $(3, 330)$, $(2, 380)$

Ćwiczenie. Co to za miejsca na płaszczyźnie z układem prostokątnym? a) $x = 3$, b) $y = -2$, c) $2 < x < 4$, d) $y \geq 5$, e) $y = 2$, $x \in \{1, 2, 3\}$, f) $x = 2$ lub $x = 3$

Odp. a) prosta pionowa, b) prosta pozioma, c) pas pionowy bez brzegu, d) półpłaszczyzna z brzegiem, e) kilka punktów, f) dwie proste pionowe

Ćwiczenie. Co to za miejsca na płaszczyźnie z układem biegunowym? a) $r = 2$, b) $\alpha = 30^\circ$, c) $2 < r < 4$, d) $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Odp. a) okrąg, b) półprosta, c) pierścień bez brzegu, d) kąt z ramionami

Uwaga! Ustalić konwencję jak zaznaczać należenie i nienależenie brzegi (puste punkty, linie przerywane).

Uwaga! Potrzebne są wyraźne zapisy z koniunkcją i alternatywą warunków.

Ćwiczenie. Co to za miejsca na płaszczyźnie z układem prostokątnym?

a) $y = 2$ i $y = 3$, b) $y = 2$ lub $y = 3$, c) $(y = 2 \text{ lub } y = 3) \text{ i } x = 7$, d) $(y = 2 \text{ lub } (y = 3 \text{ i } x = 7))$, e) $y = 2$ lub $y = 3$ lub $x = 7$
 a) zbiór pusty, b) 2 proste, c) 2 punkty, d) prosta i punkt, e) 3 proste

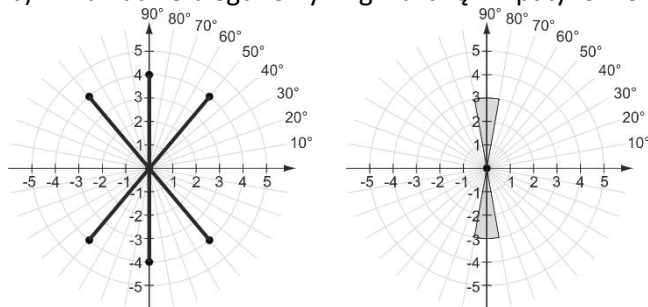
Ćwiczenie. Co to za miejsca na płaszczyźnie z układem biegunowym?

a) $r = 2$ i $\alpha \in \{30^\circ, 40^\circ, 90^\circ\}$, b) $\alpha = 30^\circ$ i $(1 < r < 2 \text{ lub } 4 < r < 5)$, c) $r = 2$ lub $(3 < r < 4 \text{ i } 45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$

Odp. na rysunku

Ćwiczenie. Opisać warunkami narysowane figury.

a) w układzie prostokątnym: prostokąt (różne warianty brzegu)
 b) w układzie biegunowym: gwiazdkę z 4 patyków o ramionach długości 3



II część wykładu (po konkursie, z komputerem)

Do czego służy układ współrzędnych – rysowanie figur opisanych analitycznie (wykresy)

To nie jest „rysowanie”, tylko obliczanie współrzędnych i zapalanie punkt po punkcie.

MŁODZICY: w układzie prostokątnym ($y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, koło) i spirale, koła, elipsy w biegunowym,

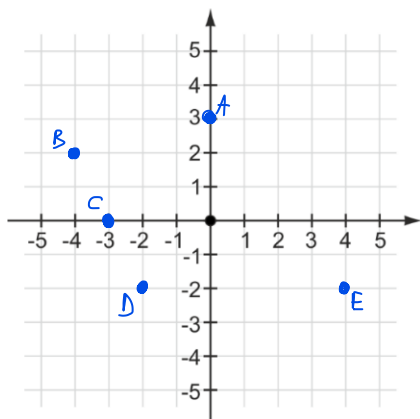
JUNIORZY: w układzie biegunowym (koło, elipsa, spirale zwijające, rozwijające i inne, np. koniczyna, kardioida).

imię i nazwisko: WZORZEC ODPowiedzi

szkoła:

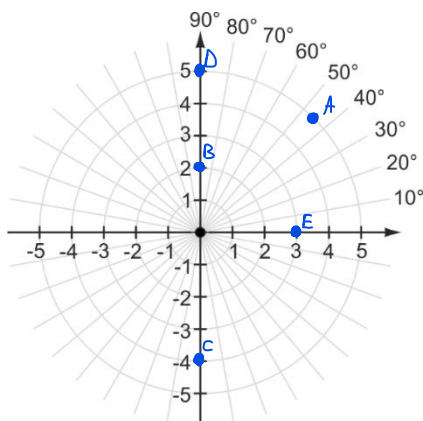
Zad. 1. Zaznacz podane punkty w prostokątnym układzie współrzędnych i podpisz ich nazwy.

A (0, 3) B (-4, 2) C (-3, 0) D (-2, -2) E (4, -2)



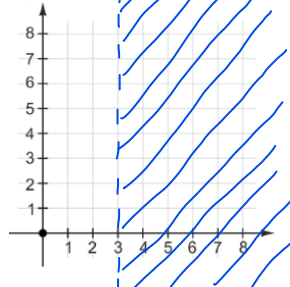
Zad. 2. Zaznacz podane punkty w biegunowym układzie współrzędnych i podpisz ich nazwy.

A (5, 45°) B (2, 90°) C (4, 270°) D (5, 450°) E (3, 720°)

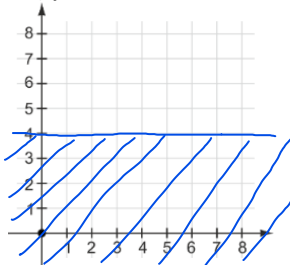


Zad. 3. Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych figury opisane podanymi warunkami.

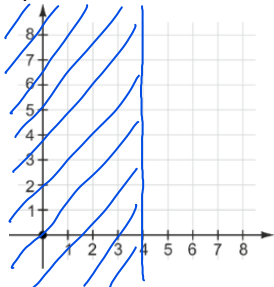
a) $x > 3$



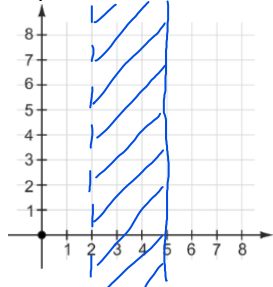
b) $y \leq 4$



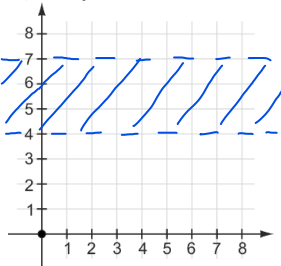
c) $x \leq 4$



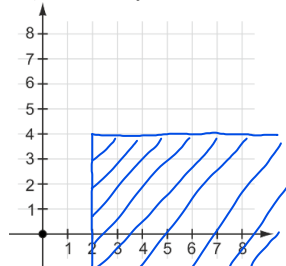
d) $2 < x \leq 5$



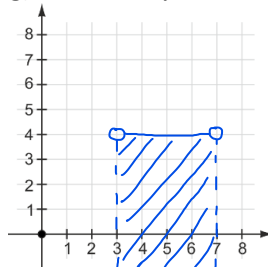
e) $4 < y < 7$



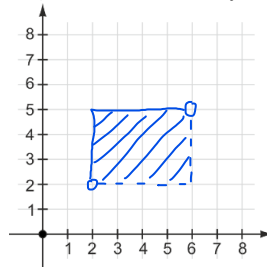
f) $x \geq 2$ i $y \leq 4$



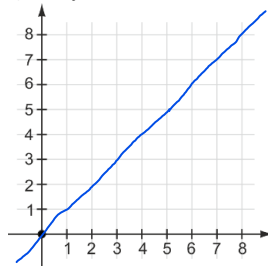
g) $3 < x < 7$ i $y \leq 4$



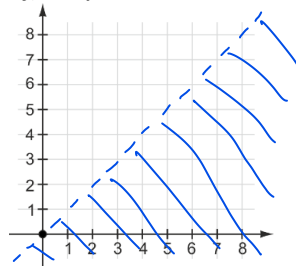
h) $2 \leq x < 6$ i $2 < y \leq 5$



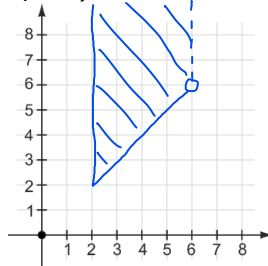
i) $x = y$



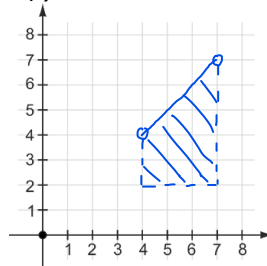
j) $x > y$



k) $x \leq y$ i $6 > x \geq 2$

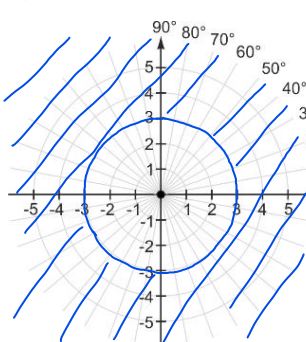


l) $y > 2$ i $7 > x > 4$ i $x \geq y$

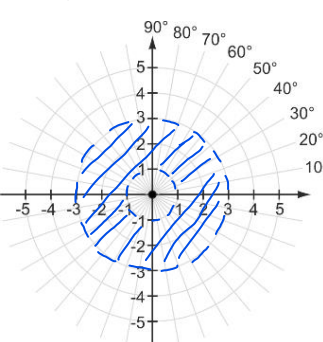


Zad. 4. Zaznacz w biegunowym układzie współrzędnych figury opisane podanymi warunkami.

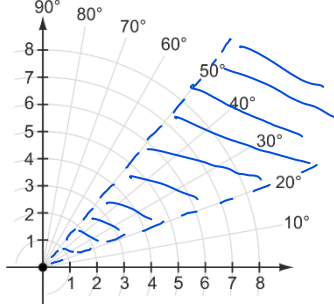
a) $r \geq 3$



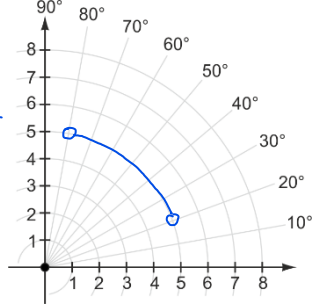
b) $1 < r < 3$



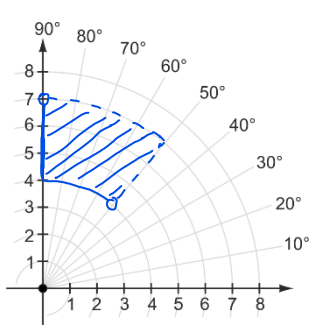
c) $20 < \alpha < 50$



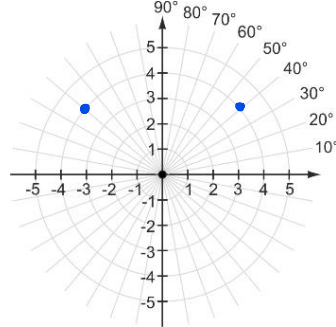
d) $r = 5$ i $20 < \alpha < 80$



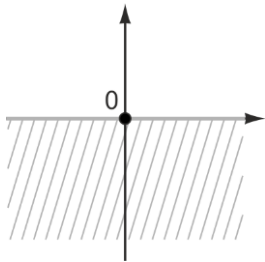
e) $7 > r \geq 4$ i $50 < \alpha \leq 90$



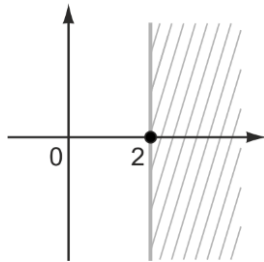
f) $4 = r$ i $\alpha \in \{40, 140\}$



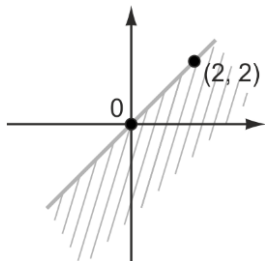
Zad. 5. Opisz odpowiednimi warunkami poniższe figury na płaszczyźnie z układem prostokątnym.



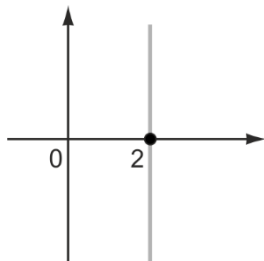
a) $y < 0$



b) $x > 2$

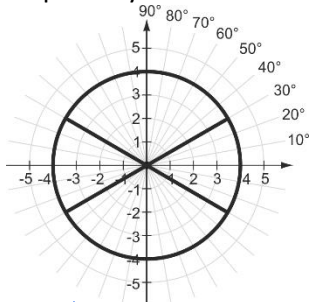


c) $y < x$

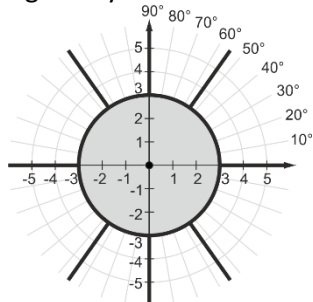


d) $x = 2$

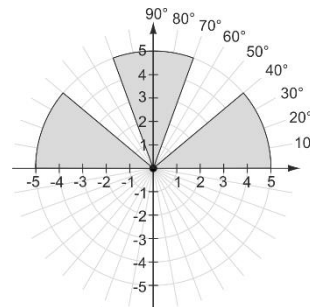
Zad. 6. Opisz odpowiednimi warunkami poniższe figury na płaszczyźnie z układem biegunowym.



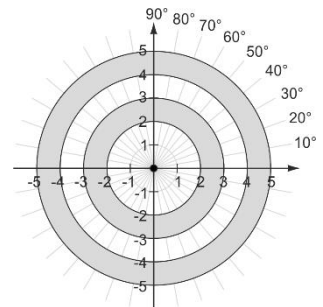
a) $r = 4$ lub $(r < 4 \text{ i } \alpha \in \{30, 150, 210, 330\})$



b) $r \leq 3$ lub $\alpha \in \{0, 55, 30, 125, 180, 235, 270, 305\}$



c) $r \leq 5$ i $(0 \leq \alpha \leq 40 \text{ lub } 70 \leq \alpha \leq 110 \text{ lub } 140 \leq \alpha \leq 180)$



d) $2 \leq r \leq 3$ lub $4 \leq r \leq 5$

Zad. 7. Podaj warunki opisujące poniższe figury na płaszczyźnie z układem prostokątnym.

a) odcinek poziomy na wysokości 2 nad osią poziomą zawarty między pionowymi prostymi poprowadzonymi w odległościach 5 i 7 na prawo od osi pionowej.

$y = 2$ i $5 \leq x \leq 7$

b) fragment płaszczyzny leżący poniżej linii prostej poziomej poprowadzonej 2 jednostki poniżej osi poziomej.

$y < -2$

Zad. 8. Podaj warunki opisujące poniższe figury na płaszczyźnie z układem biegunowym.

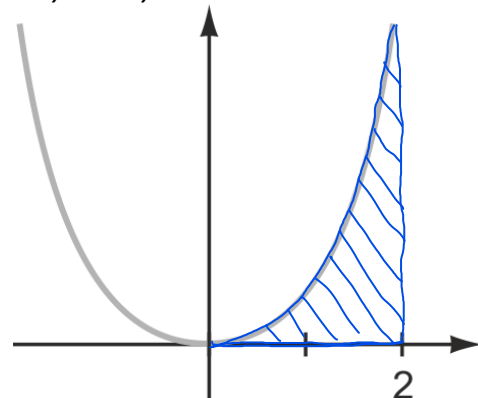
a) wewnątrz koła (bez brzegu) o środku w punkcie zerowym i promieniu 7.

$r < 7$

b) lewe półkoło koła o środku w (0, 0) i pionowej średnicy oraz promieniu 10

$r \leq 10$ i $90 \leq \alpha \leq 270$

Zad. 9. Wszystkie punkty linii przedstawionej na rysunku spełniają warunek $y = x \cdot x$. Zaciemnij obszar płaszczyzny, który spełnia wszystkie podane warunki: $0 \leq x \leq 2$ i $y \geq 0$ i $y \leq x \cdot x$.

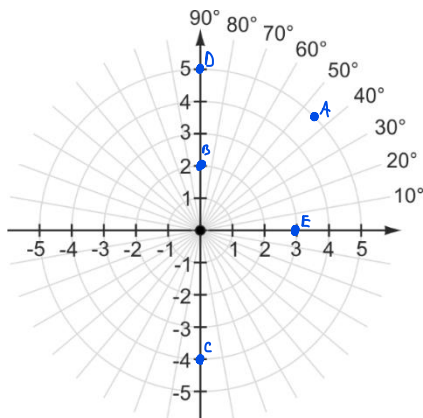


imię i nazwisko: WZORZEC ODPowiedzi

szkoła:

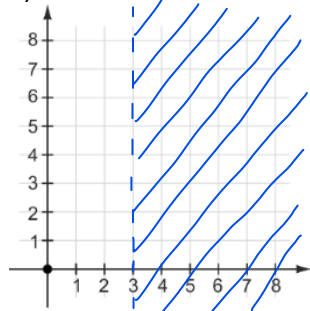
Zad. 1. Zaznacz podane punkty w biegunowym układzie współrzędnych i podpisz ich nazwy.

A (5, 45°) B (2, 90°) C (4, 270°) D (5, 450°) E (3, 720°)

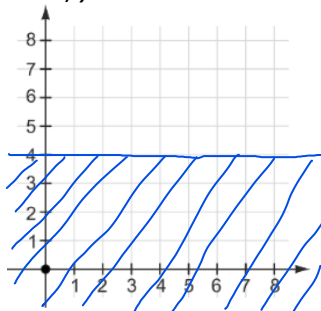


Zad. 2. Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych figury opisane podanymi warunkami.

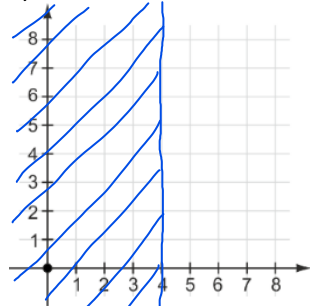
a) $x > 3$



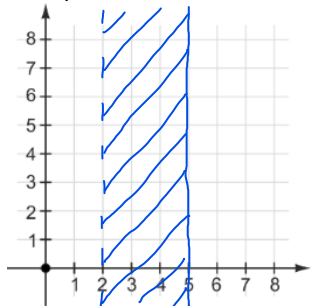
b) $y \leq 4$



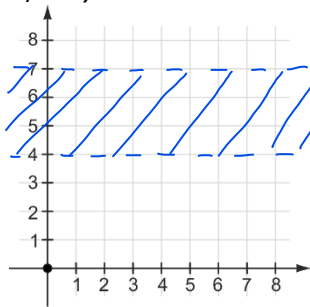
c) $x \leq 4$



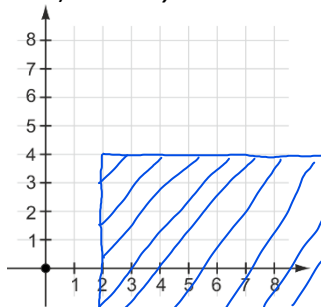
d) $2 < x \leq 5$



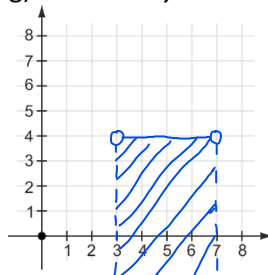
e) $4 < y < 7$



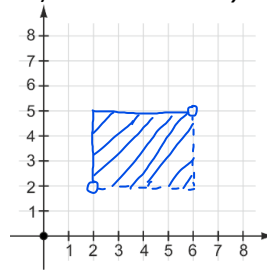
f) $x \geq 2$ i $y \leq 4$



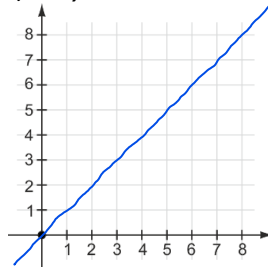
g) $3 < x < 7$ i $y \leq 4$



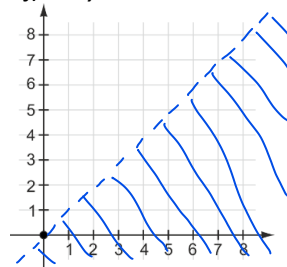
h) $2 \leq x < 6$ i $2 < y \leq 5$



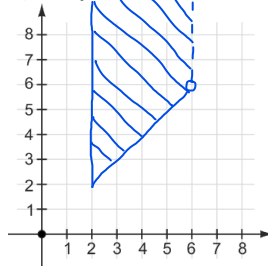
i) $x = y$



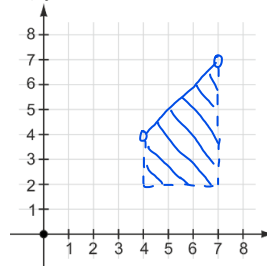
j) $x > y$



k) $x \leq y$ i $6 > x \geq 2$

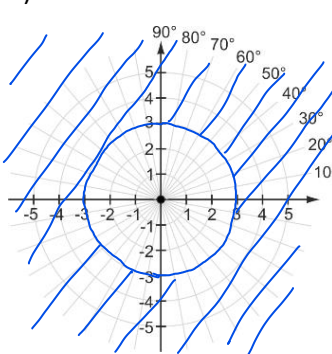


l) $y > 2$ i $7 > x > 4$ i $x \geq y$

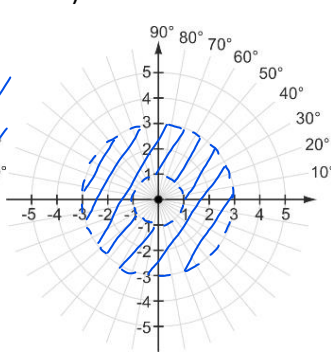


Zad. 3. Zaznacz w biegunowym układzie współrzędnych figury opisane podanymi warunkami.

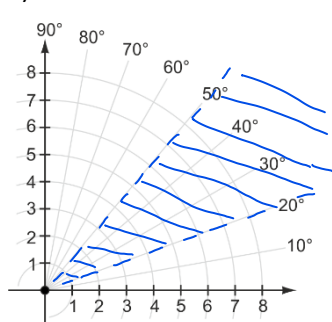
a) $r \geq 3$



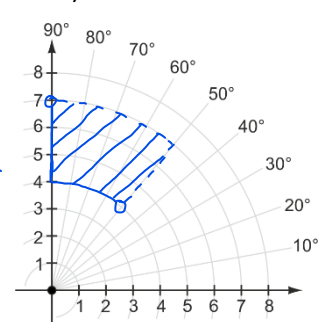
b) $1 < r < 3$



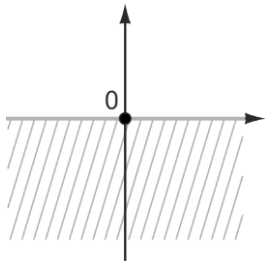
c) $20 < \alpha < 50$



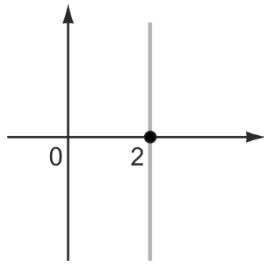
d) $7 > r \geq 4$ i $50 < \alpha \leq 90$



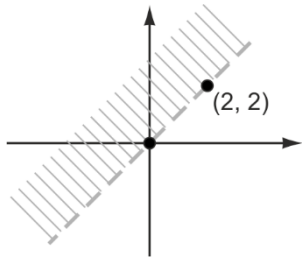
Zad. 4. Opisz odpowiednimi warunkami poniższe figury na płaszczyźnie z układem prostokątnym.



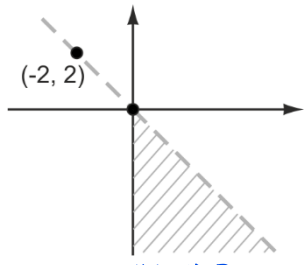
a) $y \leq 0$



b) $x = 2$

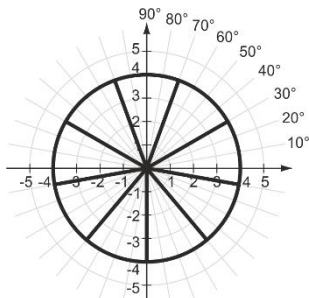


c) $y > x$

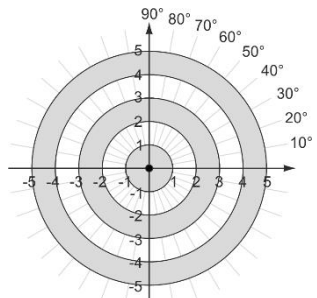


d) $-y > x > 0$

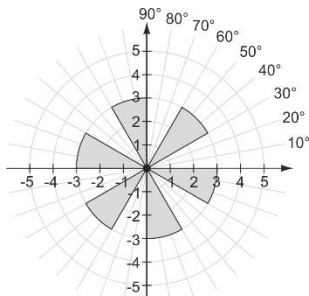
Zad. 5. Opisz odpowiednimi warunkami poniższe figury na płaszczyźnie z układem biegunowym.



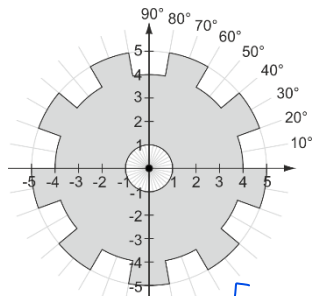
a) $r = 4$ lub
 $(r < 4 \text{ i } \alpha \in \{30, 70, 110, 150, 190, 230, 270, 310, 350\})$



b) $r \leq 1$ lub $2 \leq r \leq 3$
 lub $4 \leq r \leq 5$

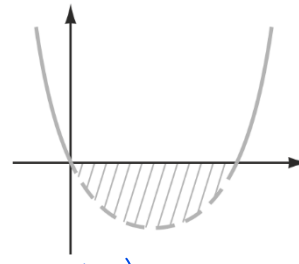
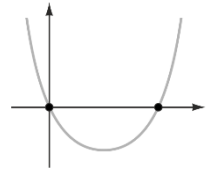


c) $r \leq 3$ i
 $(30 \leq \alpha \leq 60 \text{ lub } 90 \leq \alpha \leq 120$
 lub $150 \leq \alpha \leq 180 \text{ lub } 210 \leq \alpha \leq 240$
 lub $270 \leq \alpha \leq 300 \text{ lub } 330 \leq \alpha \leq 360)$

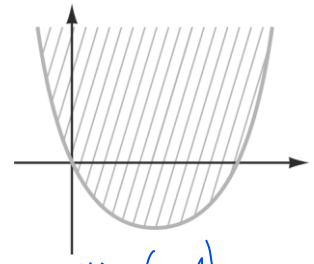


d) $1 \leq r \leq 4$ lub $4 \leq r \leq 5$
 i $(20 \leq \alpha \leq 40 \text{ lub } 60 \leq \alpha \leq 80 \text{ lub } 100 \leq \alpha \leq 120 \text{ lub } 140 \leq \alpha \leq 160 \text{ lub } 180 \leq \alpha \leq 200 \text{ lub } 220 \leq \alpha \leq 240 \text{ lub } 260 \leq \alpha \leq 280 \text{ lub } 300 \leq \alpha \leq 320 \text{ lub } 340 \leq \alpha \leq 360)$

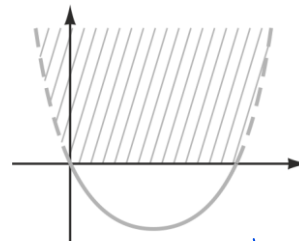
Zad. 6. Wszystkie punkty linii przedstawionej na rysunku spełniają warunek $y = x(x-1)$. Podaj warunki opisujące zakreskowane figury na płaszczyźnie z układem prostokątnym.



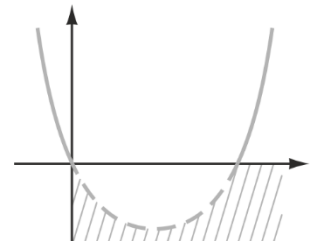
a) $x(x-1) < y < 0$



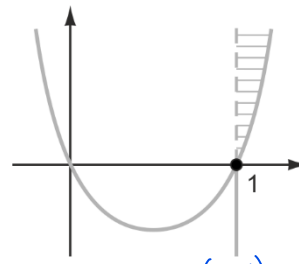
b) $y \geq x(x-1)$



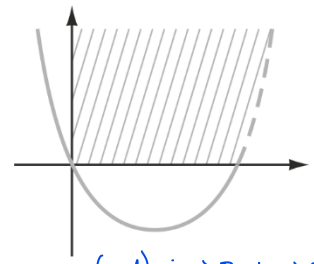
c) $y > 0$ i $y > x(x-1)$



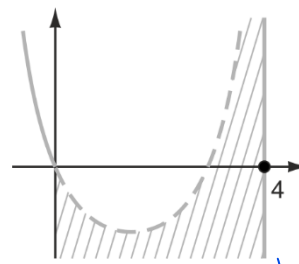
d) $y < 0$ i $y < x(x-1)$ i $x > 0$



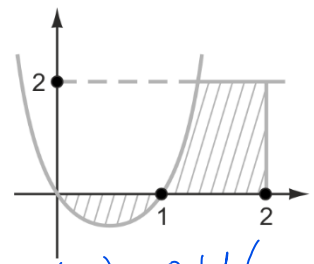
e) $x > 1$ i $y \geq x(x-1)$



f) $y > x(x-1)$ i $x > 0$ i $y > 0$



g) $0 < x \leq 4$ i $y < x(x-1)$



h) $x(x-1) \leq y < 0$ lub $(y \leq x(x-1)$
 i $0 < y \leq 2$ i $1 \leq x \leq 2)$

Zad. 7. Opisz słowami, jak wygląda figura spełniająca podane warunki.

a) $0 < \alpha \leq 3600$ i $r = \alpha : 10$
 rozwijająca się spirala
 (10 obrotów)

b) $10 < \alpha$ i $r = 10 : \alpha$
 zwijająca się spirala
 (∞ - wiele obrotów)

3 prawidłowe odpowiedzi: 2 pkt.
 2 prawidłowe odpowiedzi: 1 pkt.

