

Liga Zadaniowa — Grupy D i E (KLUCZ)

XXV Letni Obóz Naukowy — Polanica-Zdrój

20–24 czerwca 2026

Dzień 1

grupy D i E

sobota, 20 czerwca 2026

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b liczba $2(a^4 + b^4 + (a+b)^4)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, uzyskując

$$2(a^4 + b^4 + (a+b)^4) = 4(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4).$$

Oczywiście liczba 4 jest kwadratem, więc wystarczy udowodnić, że jest nim również drugi czynnik. W istocie:

$$\begin{aligned} a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 &= a^2(a^2 + ab + b^2) + ab(a^2 + ab + b^2) + b^2(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a^2 + ab + b^2)^2. \end{aligned}$$

2. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 + 3c^2 &= 111, \\ 5a + 4b + 6c &= 78. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Pomnóżmy drugie równanie przez 2 i odejmijmy od pierwszego:

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 2(5a + 4b + 6c) = 111 - 156 = -45.$$

Po rozwinięciu i zwinięciu w pełne kwadraty otrzymujemy

$$(a-5)^2 + 2(b-2)^2 + 3(c-2)^2 = 0.$$

Suma kwadratów liczb rzeczywistych jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ze składników jest równy 0. Zatem jedynym możliwym rozwiązaniem jest trójka $a = 5, b = 2, c = 2$.

Jednakże po podstawieniu do pierwszego równania: $5^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 = 45 \neq 111$. Nie istnieją zatem rozwiązania wyjściowego układu równań.

3. W sali kinowej znajduje się 100 miejsc, ponumerowanych od 1 do 100. Na pierwszy seans przyszło 100 widzów i każdy z nich zajął jedno miejsce. Po przerwie widzowie powrócili na salę na drugi seans, ponownie zajmując wszystkie miejsca (niekoniecznie w tej samej konfiguracji). Następnie każdy widz obliczył różnicę między większym a mniejszym numerem swojego miejsca z obu seansów. Udowodnij, że suma obliczonych w ten sposób stu różnic jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez a_i numer miejsca i -tego widza podczas pierwszego seansu, a przez b_i — podczas drugiego seansu. Wystarczy uzasadnić, że suma

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{100} - b_{100}|$$

jest liczbą parzystą.

Dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $|x|$ ma tę samą parzystość co x . Zatem wystarczy uzasadnić, że parzysta jest suma

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100}).$$

Jednakże zbiór $\{a_1, \dots, a_{100}\}$ jest równy zbiorowi $\{b_1, \dots, b_{100}\}$ — to te same liczby w innej kolejności. Stąd powyższa suma jest równa 0.

Dzień 2 grupy D i E niedziela, 21 czerwca 2026

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie X . Obwody trójkątów ABX i CDX równe są odpowiednio 3 oraz 1. Wykaż, że suma obwodów trójkątów BCX i DAX jest nie większa od 8.

Rozwiązanie: Wykażemy, że obwód każdego z trójkątów BCX i DAX jest nie większy od 4. Korzystając wielokrotnie z nierówności trójkąta:

$$\begin{aligned} BC + BX + CX &< (BX + CX) + BX + CX \\ &< (BX + CX) + (AB + AX) + (CD + DX) \\ &= \underbrace{(AB + AX + BX)}_{=3} + \underbrace{(CD + CX + DX)}_{=1} = 4. \end{aligned}$$

Analogicznie uzasadniamy, że obwód trójkąta DAX jest nie większy od 4, więc suma obwodów jest nie większa od 8.

5. Piotrek ma do dyspozycji wagę szalkową oraz zestaw 10 odważników o różnych masach, które są liczbami całkowitymi z przedziału od 1 do 100. Udowodnij, że stawiając pewne ze swoich odważników na szalach, Piotrek może doprowadzić wagę do stanu równowagi.

Rozwiązanie: Każdy z 10 odważników może zostać wybrany lub nie, więc istnieje $2^{10} - 1 = 1023$ niepustych podzbiorów zbioru odważników. Łączna masa każdego z nich jest liczbą całkowitą z przedziału od 1 do $10 \cdot 100 = 1000$, a więc jest co najwyżej 1000 możliwych wartości. Mamy 1023 podzbiory i co najwyżej 1000 wartości sum, więc pewne dwa podzbiory mają tę samą łączną masę.

- Jeśli te dwa podzbiory są rozłączne, to Piotrek stawia elementy jednego na lewej, a drugiego na prawej szalce — uzyskuje równowagę.
- Jeśli mają wspólne elementy, usuwamy je z obu podzbiorów. Otrzymujemy dwa rozłączne podzbiory o równych łącznych masach — sprowadzamy do poprzedniego przypadku.

W obu przypadkach Piotrek może doprowadzić do równowagi.

6. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$. Niech E będzie takim punktem na boku AD , że $\angle BEA = \angle CED$. Wykaż, że

$$(AB + CD)^2 + AD^2 = (BE + CE)^2.$$

Rozwiązanie: Niech C' będzie obrazem punktu C w symetrii względem prostej AD . Wtedy $\angle C'ED = \angle CED = \angle BEA$, zatem punkty C', E, B są współliniowe.

Niech X będzie takim punktem, że czworokąt $C'BXD$ jest równoległobokiem. Punkt X leży na prostej AB , ale nie na półprostej BA . Trójkąt DAX jest prostokątny z kątem prostym przy wierzchołku A , a długości jego przyprostokątnych to

$$AD \quad \text{oraz} \quad AX = AB + BX = AB + C'D = AB + CD.$$

Przeciwprostokątna wynosi $DX = C'B = BE + C'E = BE + CE$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$(AB + CD)^2 + AD^2 = (BE + CE)^2.$$

Dzień 3 grupy D i E poniedziałek, 22 czerwca 2026

7. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek liczb naturalnych a, b, c, d większych od 1000, takich że liczby c, d są względnie pierwsze oraz

$$a^2 + b^2 = 2c^2 + 2d^2.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych c, d zachodzi

$$(c - d)^2 + (c + d)^2 = 2c^2 + 2d^2.$$

Wystarczy więc znaleźć nieskończenie wiele par (c, d) względnie pierwszych, takich że $c, d, c - d, c + d > 1000$.

Niech $d = 1001$ oraz niech c będzie liczbą pierwszą większą od 2002. Takich liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, a każda z nich jest względnie pierwsza z d . Dla każdej takiej pary kładziemy $a = c - d$ oraz $b = c + d$.

8. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek

$$(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) = 1.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy $a + b$.

Rozwiązanie: Z wzoru na różnicę kwadratów:

$$(\sqrt{a^2 + 1} + a)(\sqrt{a^2 + 1} - a) = (a^2 + 1) - a^2 = 1.$$

Zatem $\sqrt{a^2 + 1} - a = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} + a} = \sqrt{b^2 + 1} + b$. Stąd

$$a + b = \sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{b^2 + 1}.$$

Analogicznie (startując od drugiego czynnika) uzyskujemy $a + b = \sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1}$, czyli liczbę przeciwną. Zatem $a + b = 0$.

Wartość ta jest osiągnięta, np. dla $a = 1, b = -1$: $(1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = 2 - 1 = 1$.

9. Przy dwóch n -osobowych stołach zasiada $2n$ osób. Rozpoczyna się następujący proces: w każdej minucie pewne dwie osoby, siedzące aktualnie przy różnych stołach, zamieniają się miejscami. Proces ten zakończył się, gdy każde dwie osoby zamieniły się ze sobą miejscami dokładnie jeden raz. Udowodnij, że dowolne dwie osoby, które na początku siedziały przy tym samym stole, po zakończeniu procesu również siedzą razem przy jednym stole.

Rozwiązanie: Każda osoba zamieniła się dokładnie raz z każdą z pozostałych $2n - 1$ osób, a więc zmieniła stół dokładnie $2n - 1$ razy — czyli nieparzystą liczbę razy.

Jeżeli osoby A i B początkowo siedziały przy tym samym stole, to każda z nich zmieniła stół nieparzystą liczbę razy. Osoba, która zaczyna przy pewnym stole i zmienia go nieparzystą liczbę razy, kończy przy drugim stole — ale obie kończą przy tym samym stole, bo obie zmieniły parzystość tyle samo razy.

Precyzyjniej: A zaczyna przy stole 1 i po $2n - 1$ zmianach jest przy stole 2. Analogicznie B . Zatem obie kończą przy tym samym stole.

Dzień 4

grupy D i E

wtorek, 23 czerwca 2026

10. Wyznacz najmniejszą liczbę pól standardowej szachownicy 8×8 , na których należy zmienić kolor (z białego na czarny lub odwrotnie), aby uzyskać układ, w którym żadne dwa pola stykające się wyłącznie jednym narożnikiem nie są tego samego koloru. (Pola mające wspólny bok mogą mieć ten sam kolor).

Rozwiązanie: Podzielmy szachownicę na 16 rozłącznych kwadratów rozmiaru 2×2 . Każdy z nich można podzielić na 2 pary pól graniczących jednym narożnikiem. W każdej z $16 \cdot 2 = 32$ takich par trzeba zmienić kolor co najmniej jednego pola, więc łącznie trzeba przemaalować co najmniej 32 pola.

Z drugiej strony, przemaalowując wszystkie pola w kolumnach 2, 4, 6, 8, uzyskujemy kolorowanie spełniające warunki zadania — to dokładnie 32 pola.

Odpowiedź: $\boxed{32}$.

11. Dane są kwadraty $ABCD$ i $AEGF$. Niech H będzie takim punktem na odcinku ED , że prosta AH jest prostopadła do prostej FB . Załóżmy przy tym, że $AH = 4$. Wyznacz długość odcinka BF .

Rozwiązanie: Rozważmy obrót wokół punktu A o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara (taki, że $D \mapsto B$ oraz $F \mapsto E$). Niech B' będzie obrazem punktu B przy tym obrocie.

Wtedy $\angle DAB' = 180^\circ$, więc punkty D, A, B' są współliniowe i $AB' = AB$. Ponadto odcinek FB przechodzi na odcinek EB' , więc (z własności obrotu) proste $B'E$ i FB są prostopadłe.

Skoro proste $FB \perp AH$ oraz $FB \perp B'E$, to proste $AH \parallel B'E$. Punkt A jest środkiem odcinka DB' , więc AH jest linią środkową w trójkącie $B'DE$:

$$BF = B'E = 2 \cdot AH = 2 \cdot 4 = \boxed{8}.$$

- 12.** Wykaż, że istnieją liczby całkowite x, y większe od 999, dla których liczba $1 + 2^x + 2^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k :

$$(1 + 2^k)^2 = 1 + 2 \cdot 2^k + 2^{2k} = 1 + 2^{k+1} + 2^{2k}.$$

Biorąc $k = 1000$, otrzymujemy $x = k + 1 = 1001$ oraz $y = 2k = 2000$, a więc oba są większe od 999.