# Liga Zadaniowa — Grupy D i E

XXV Letni Obóz Naukowy — Polanica-Zdrój

20–24 czerwca 2026

Każde zadanie rozwiązuj **na osobnej kartce**. Na kartce napisz dużym drukiem:

**numer zadania** · imię i nazwisko · nr pokoju · grupa (D/E)

## Dzień 1 — grupy D i E — sobota, 20 czerwca 2026

**1.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych $a, b$ liczba $2(a^4 + b^4 + (a+b)^4)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

**2.** Rozstrzygnij, czy istnieją liczby rzeczywiste $a, b, c$ spełniające układ równań

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 111,$$
$$5a + 4b + 6c = 78.$$

**3.** W sali kinowej znajduje się 100 miejsc, ponumerowanych od 1 do 100. Na pierwszy seans przyszło 100 widzów i każdy z nich zajął jedno miejsce. Po przerwie widzowie powrócili na salę na drugi seans, ponownie zajmując wszystkie miejsca (niekoniecznie w tej samej konfiguracji). Następnie każdy widz obliczył różnicę między większym a mniejszym numerem swojego miejsca z obu seansów. Udowodnij, że suma obliczonych w ten sposób stu różnic jest liczbą parzystą.

## Dzień 2 — grupy D i E — niedziela, 21 czerwca 2026

**4.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $X$. Obwody trójkątów $ABX$ i $CDX$ równe są odpowiednio 3 oraz 1. Wykaż, że suma obwodów trójkątów $BCX$ i $DAX$ jest nie większa od 8.

**5.** Piotrek ma do dyspozycji wagę szalkową oraz zestaw 10 odważników o różnych masach, które są liczbami całkowitymi z przedziału od 1 do 100. Udowodnij, że stawiając pewne ze swoich odważników na szalach, Piotrek może doprowadzić wagę do stanu równowagi.

**6.** Dany jest trapez $ABCD$, w którym $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Niech $E$ będzie takim punktem na boku $AD$, że $\angle BEA = \angle CED$. Wykaż, że

$$(AB + CD)^2 + AD^2 = (BE + CE)^2.$$

## Dzień 3 grupy D i E poniedziałek, 22 czerwca 2026

**7.** Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek liczb naturalnych $a, b, c, d$ większych od 1000, takich że liczby $c, d$ są względnie pierwsze oraz

$$a^2 + b^2 = 2c^2 + 2d^2.$$

**8.** Liczby rzeczywiste $a, b$ spełniają warunek

$$(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) = 1.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy $a + b$.

**9.** Przy dwóch $n$-osobowych stołach zasiada $2n$ osób. Rozpoczyna się następujący proces: w każdej minucie pewne dwie osoby, siedzące aktualnie przy różnych stołach, zamieniają się miejscami. Proces ten zakończył się, gdy każde dwie osoby zamieniły się ze sobą miejscami dokładnie jeden raz. Udowodnij, że dowolne dwie osoby, które na początku siedziały przy tym samym stole, po zakończeniu procesu również siedzą razem przy jednym stole.

## Dzień 4 grupy D i E wtorek, 23 czerwca 2026

**10.** Wyznacz najmniejszą liczbę pól standardowej szachownicy $8 \times 8$, na których należy zmienić kolor (z białego na czarny lub odwrotnie), aby uzyskać układ, w którym żadne dwa pola stykające się wyłącznie jednym narożnikiem nie są tego samego koloru. (Pola mające wspólny bok mogą mieć ten sam kolor).

**11.** Dane są kwadraty $ABCD$ i $AEGF$. Niech $H$ będzie takim punktem na odcinku $ED$, że prosta $AH$ jest prostopadła do prostej $FB$. Załóżmy przy tym, że $AH = 4$. Wyznacz długość odcinka $BF$.

**12.** Wykaż, że istnieją liczby całkowite $x, y$ większe od 999, dla których liczba $1 + 2^x + 2^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.