

Mecz matematyczny

1. Punkt kratowy na płaszczyźnie to punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Środkiem ciężkości (barycentrum) czterech punktów (x_i, y_i) dla $i = 1, 2, 3, 4$, jest punkt $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$. Niech n będzie największą liczbą naturalną o następującej własności: istnieje n różnych punktów kratowych na płaszczyźnie takich, że środek ciężkości żadnych czterech z nich nie jest punktem kratowym. Udowodnij, że $n = 12$.

Rozwiązanie: Aby udowodnić, że $n \geq 12$, musimy pokazać, że istnieje 12 punktów kratowych (x_i, y_i) , takich, że żadne 4 nie tworzą kratowego środka ciężkości. Gwarantuje to zbiór punktów dobranych tak, że: $x_i \equiv 0 \pmod{4}$ dla $i = 1, \dots, 6$, $x_i \equiv 1 \pmod{4}$ dla $i = 7, \dots, 12$, a dla drugiej współrzędnej $y_i \equiv 0 \pmod{4}$ dla $i = 1, 2, 3, 10, 11, 12$ oraz $y_i \equiv 1 \pmod{4}$ dla $i = 4, \dots, 9$. Teraz niech P_i ($i = 1, 2, \dots, 13$) będą dowolnymi punktami kratowymi. Pokażemy, że pewne 4 z nich na pewno wyznaczają kratowy środek ciężkości. Zauważmy najpierw, opierając się na Zasadzie Szufladkowej, że wśród dowolnych 5 punktów zawsze znajdziemy 2 takie, które mają te same parzystości na współrzędnych x oraz na współrzędnych y . Oznacza to, że wśród dowolnych 5 punktów istnieją 2, których środek geometryczny również jest punktem kratowym. Wielokrotne zastosowanie tej obserwacji do naszych 13 punktów pozwala nam wyodrębnić 5 rozłącznych par punktów, z których każda ma kratowy środek. Wśród tych 5 nowo wyznaczonych środków ponownie znajdziemy 2 z nich (powiedzmy M i M'), których wspólny środek C jest punktem kratowym. Ostatecznie, jeśli M i M' są środkami odpowiednio odcinków P_iP_j oraz P_kP_l , to punkt C jest w istocie poszukiwanym środkiem ciężkości całej czwórki punktów P_i, P_j, P_k, P_l .

2. Trzy łuki okręgów w_1, w_2, w_3 o wspólnych końcach A i B leżą po tej samej stronie prostej AB ; w_2 leży między w_1 i w_3 . Dwie półproste wychodzące z punktu B przecinają te łuki odpowiednio w punktach M_1, M_2, M_3 oraz K_1, K_2, K_3 . Udowodnij, że

$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}.$$

Rozwiązanie: Z własności kątów wpisanych w okrąg zachodzą równości $\angle AK_1B = \angle AM_1B$ oraz $\angle AK_2B = \angle AM_2B$. Z tego wynika, że trójkąty są podobne: $\triangle AK_1K_2 \sim \triangle AM_1M_2$, więc

$$\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{AM_2}.$$

Analogicznie otrzymujemy podobieństwo $\triangle AK_2K_3 \sim \triangle AM_2M_3$, co daje

$$\frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{AK_2}{AM_2}.$$

Z powyższych równań otrzymujemy $\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3}$, co po szybkim przekształceniu dowodzi żądanej tezy.

3. 25 państw powołało komitet, dla którego obowiązują następujące zasady: (1) komitet powinien spotykać się codziennie; (2) na każdym spotkaniu powinno być reprezentowane co najmniej jedno państwo członkowskie; (3) na dowolnych dwóch różnych spotkaniach powinien być obecny inny zbiór reprezentowanych państw członkowskich; oraz (4) na n -tym spotkaniu, dla każdego $k < n$, zbiór reprezentowanych państw powinien zawierać co najmniej jedno państwo, które było reprezentowane na k -tym spotkaniu. Przez ile dni maksymalnie komitet może odbywać swoje spotkania?

Rozwiązanie: Odpowiedź: Co najwyżej $2^{24} = 16777216$ dni. Jeśli ustalimy jednego stałego członka, który jest obecny na wszystkich spotkaniach, zasady (2) i (4) będą zawsze automatycznie spełnione. Istnieje dokładnie 2^{24} różnych podzbiorów, które można ułożyć z pozostałych 24 państw członkowskich, co gwarantuje możliwość zorganizowania co najmniej 2^{24} spotkań. Z drugiej strony, zasada (4) zabrania w szczególności wystąpienia na dwóch różnych spotkaniach zbiorów, które są względem siebie rozłączne (dopełniają się), a co za tym idzie, uniemożliwia zestawianie ze sobą zbiorów i ich dopełnień. Stąd całkowita liczba spotkań (podzbiorów)

nie może przekroczyć połowy liczby wszystkich możliwych podzbiorów, czyli $\frac{1}{2} \cdot 2^{25} = 2^{24}$. Wnioskujemy z tego, że maksymalna liczba spotkań komitetu wynosi dokładnie $2^{24} = 16777216$.

4. Czy można znaleźć 2026 różnych dodatnich liczb będących kwadratami liczb całkowitych, których suma również jest kwadratem liczby całkowitej?

Rozwiązanie: Odpowiedź: Tak, jest to możliwe. Zaczniemy od prostej tożsamości pitagorejskiej, takiej jak $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pomnożmy ją obustronnie przez 5^2 :

$$3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$$

i wstawmy wyjściową tożsamość w miejsce pierwszego czynnika 5^2 po lewej stronie:

$$3^2 \cdot (3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2,$$

co daje po wymnożeniu:

$$3^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 4^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2.$$

Teraz ponownie pomnożmy równanie przez 5^2 :

$$3^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$$

i znów rozbijmy pierwszy wyraz za pomocą tożsamości $5^2 = 3^2 + 4^2$:

$$3^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2 + 4^2) + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2,$$

czyli:

$$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2.$$

Krok ten (mnożenie przez 5^2 i rozbijanie pierwszego wyrazu w sumie) można powtarzać dowolną liczbę razy, za każdym razem zwiększając liczbę składników po lewej stronie o dokładnie jeden. Przeprowadzając tę procedurę odpowiednią liczbę razy, możemy uzyskać 2026 składników. Oczywiście każdy wyraz jest kwadratem liczby całkowitej, a wartości składników ściśle rosną od lewej do prawej, więc wszystkie wygenerowane liczby będą parami różne.

5. Niech a, b, c będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c \geq abc$. Udowodnij, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Rozwiązanie: Możemy swobodnie założyć, że $a, b, c > 0$. Przeprowadźmy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że $a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Wtedy siłą rzeczy $abc > a^2$, a więc $a < bc$. Analogicznie wyprowadzamy $b < ac$ oraz $c < ab$. Na mocy dobrze znanej nierówności (wynikającej m.in. z nierówności o średnich AM-GM) zachodzi zatem:

$$abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Jednak z udowodnionych wcześniej częściowych nierówności wynika, że suma $ab + bc + ca$ ostro przekracza $a + b + c$ (gdyż $ab > c$, $bc > a$, $ca > b$). Otrzymujemy ciąg $abc > a + b + c$, co stoi w jawnej sprzeczności z wyjściowym założeniem. Zatem wyjściowa teza $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$ musi być prawdziwa.

6. W tablicy liczb o wymiarach $n \times n$ wszystkie wiersze są różne (dwa wiersze uznajemy za różne, jeśli różnią się na co najmniej jednej pozycji). Udowodnij, że istnieje kolumna, którą można usunąć w taki sposób, aby pozostałe wiersze nadal były parami różne.

Rozwiązanie: Dowodzimy przez indukcję po k następującego stwierdzenia: można usunąć co najmniej $n - k + 1$ kolumn w taki sposób, że pierwsze k wierszy nadal pozostaje parami różnych. Dla $k = 2$ twierdzenie jest prawdziwe. Rzeczywiście, pierwsze dwa wiersze różnią się na co najmniej jednej pozycji, więc możemy

usunąć pozostałe $n - 1$ kolumn. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla k , to znaczy możemy usunąć $n - k + 1$ kolumn, a pierwsze k wierszy wciąż się różni. Jeśli po usunięciu tych kolumn $(k + 1)$ -szy wiersz jest różny od wszystkich pierwszych k wierszy, możemy przywrócić dowolną z usuniętych kolumn i pozostać z $n - k$ usuniętymi kolumnami oraz $k + 1$ różnymi wierszami. Jeśli natomiast po usunięciu kolumn $(k + 1)$ -szy wiersz pokrywa się z jednym z pierwszych wierszy, to przywracamy kolumnę, w której te dwa wiersze różniły się w oryginalnej tablicy. Podstawiając $k = n$, otrzymujemy pożądaną rezultat dla całej tablicy.

7. Rozważmy siatkę składającą się z 25×25 kwadratów jednostkowych. Rysujemy czerwonym długopisem kontury kwadratów dowolnej wielkości na siatce. Jaka jest minimalna liczba kwadratów, które musimy narysować, aby pokolorować wszystkie linie siatki?

Rozwiązanie: Odpowiedź: 48 kwadratów. Rozważmy jedną z głównych przekątnych siatki kwadratowej. Dla dowolnego wierzchołka siatki A leżącego na tej przekątnej oznaczmy przez C najdalszy od niego koniec tej samej przekątnej. Załóżmy, że rysujemy kwadrat, którego przekątną jest AC i oznaczamy go na czerwono. W ten sposób definiujemy zbiór 48 czerwonych kwadratów (po 24 dla każdej z dwóch głównych przekątnych). Łatwo zauważyć, że jeśli narysujemy wszystkie te kwadraty, wszystkie linie na siatce zmienią kolor na czerwony. Aby pokazać, że 48 to absolutne minimum, rozważmy wszystkie odcinki siatki o długości 1, które mają dokładnie jeden koniec na brzegu siatki. Każda pozioma i każda pionowa linia prosta, która przecina siatkę od brzegu do brzegu, wyznacza dwa takie skrajne odcinki. Mamy więc $4 \cdot 24 = 96$ takich odcinków. Oczywiście jest, że obwód każdego czerwonego kwadratu (niezależnie od jego położenia) może pokrywać co najwyżej dwa z tych 96 odcinków. Wymaga to narysowania co najmniej $96/2 = 48$ kwadratów.

8. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o . Punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i półprosta AM przecina okrąg o w punkcie E . Punkt N jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC i półprosta AN przecina okrąg o w punkcie F . Wykaż, że jeżeli odcinki ME i NF są równej długości, to $\angle BAC = \angle DAC$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\angle MCE = \angle MCB + \angle BCE = \angle ACM + \angle BAE = \angle ACM + \angle CAM = \angle CME,$$

skąd wynika, że $ME = CE$. Ponadto $BE = CE$. Analogicznie dostajemy równości

$$CF = DF = NF.$$

Skoro jednak $ME = NF$, to wszystkie powyższe odcinki mają równą długość. W takim razie łuki BC i CD okręgu o niezawierające punktu A są równe. To zaś oznacza, że $\angle BAC = \angle DAC$.

9. Niech $f(x) = 4^x + 6^x + 9^x$. Udowodnij, że jeśli m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi, to $f(2^m)$ dzieli $f(2^n)$ dla wszystkich $m \leq n$.

Rozwiązanie: Zdefiniujmy $g(x) = 4^x - 6^x + 9^x$. Korzystając z tożsamości

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

i podstawiając $a = 2$ oraz $b = 3$, wyprowadzamy wniosek, że

$$f(x)g(x) = f(2x).$$

Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy

$$f(x)g(x)g(2x) \dots g(2^{k-1}x) = f(2^kx),$$

dla wszystkich $k \geq 2$. Załóżmy teraz, że $m \leq n$. Wtedy

$$f(2^m)g(2^m)g(2^{m+1}) \dots g(2^{n-1}) = f(2^n),$$

a zatem $f(2^m)$ dzieli $f(2^n)$.

- 10.** Rozważmy zbiór A składający się z dodatnich liczb całkowitych, w którym najmniejszy element jest równy 1001, a iloczyn wszystkich elementów zbioru A jest kwadratem liczby całkowitej. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość największego elementu zbioru A ?

Rozwiązanie: Odpowiedź: 1040. Najpierw udowodnimy, że $\max A$ musi wynosić co najmniej 1040. Ponieważ $1001 = 13 \cdot 77$ oraz $13 \nmid 77$, zbiór A musi zawierać wielokrotność liczby 13, która jest większa niż $13 \cdot 77$. Rozważmy następujące przypadki: - Jeśli $13 \cdot 78 \in A$, to ponieważ $13 \cdot 78 = 13^2 \cdot 6$, zbiór A musi zawierać jeszcze jedną, większą wielokrotność liczby 13. - Jeśli $13 \cdot 79 \in A$, to z racji tego, że 79 jest liczbą pierwszą, zbiór A musi zawierać inną wielokrotność liczby 79. Musi ona być większa od 1040, ponieważ $14 \cdot 79 > 1040$, a mniejsze wielokrotności nie wchodzą w grę ($12 \cdot 79 < 1001$, a 1001 to minimum zbioru). - Jeśli $13 \cdot k \in A$ dla $k \geq 80$, to wprost otrzymujemy $13 \cdot k \geq 13 \cdot 80 = 1040$, co zamyka ten etap dowodu.

Teraz wystarczy wskazać konkretny zbiór spełniający warunki zadania. Rozważmy $A = \{1001, 1008, 1012, 1035, 1040\}$. Rozkłady tych liczb na czynniki pierwsze to: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ $1008 = 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2$ $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$ $1035 = 5 \cdot 3^2 \cdot 23$ $1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13$ Suma wykładników każdej liczby pierwszej występującej w tych rozkładach jest parzysta. Wynika z tego, że iloczyn elementów zbioru A faktycznie jest kwadratem liczby całkowitej.