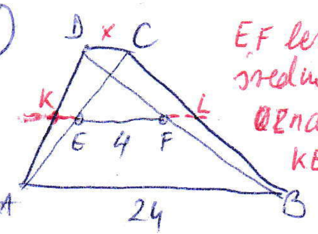
JUNIORZY 2026 ROZWIĄZANIA

1

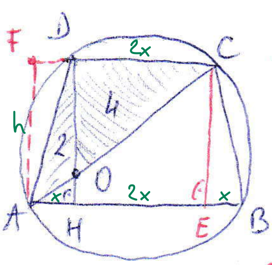


EF leży na linii średniej trapezu KL. Oznaczmy $DC = x$, $KE = \frac{1}{2}x = FL$. $KL = \frac{1}{2}(AB+DC)$

stąd $\frac{x}{2} + 4 + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(24+x) \Rightarrow x = 16$

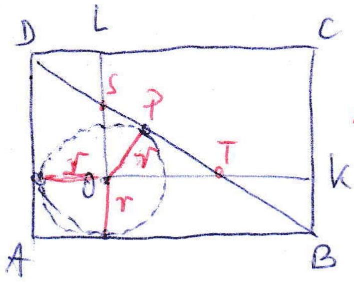
2

$P_{DOC} = 2\cdot P_{DOA} \Rightarrow DC = 2\cdot AH$. Dalej $6 = \frac{2x\cdot h}{2} \Rightarrow \frac{(2x+4x)h}{2} = 18 = P_{ABCD}$.
(wspólna podstawa DO)



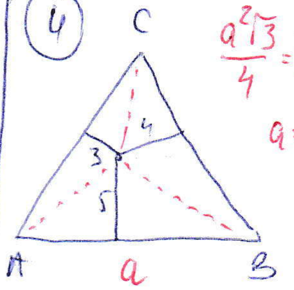
Trapez jest równoramienny i $\Delta ADF = \Delta EBC$. Zatem $P_{ABCD} = P_{AECF} = 2\cdot P_{ACF}$. Z tw. Talesa $\frac{AO}{OC} = \frac{FD}{DC} = \frac{P_{AOD}}{P_{OCD}} = \frac{1}{2}$ stąd $P_{AFD} = \frac{1}{2}P_{ACD} = 3$. Dalej $P_{ACF} = 9$ stąd $P_{ABCD} = 18$.

3



Zauważmy że $\Delta DSL = \Delta SOP$ oraz $\Delta OPT = \Delta TBK$ stąd $P_{OKCL} = P_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$

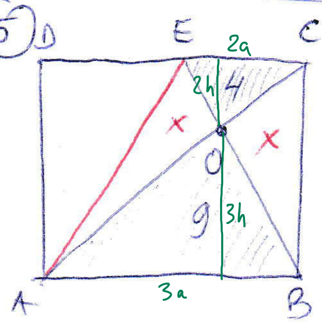
4



$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}a(3+4+5)$

$a = 8\sqrt{3}$

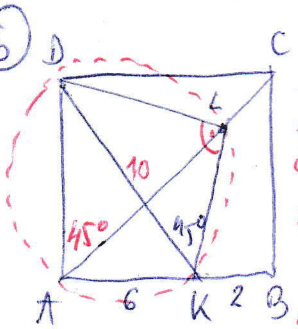
5



Zauważmy że $P_{AOE} = P_{BOC} = x$. Z własności czworokąta $P_{AOE}\cdot P_{OBC} = P_{ABO}\cdot P_{EOC}$ stąd $x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow P_{ABC} = 15 \Rightarrow P_{ABCD} = 30$.

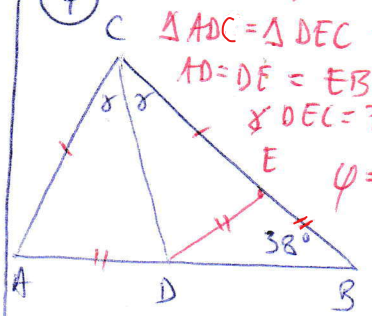
Δ podobne w skali 2:3. Dalej $\frac{3a\cdot 3h}{2} = 9 \Rightarrow 3a\cdot 5h = 30 = P_{ABCD}$.

6



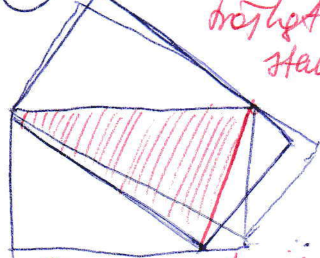
$\sphericalangle DAL = \sphericalangle DKL = 45°$ Zatem na czworokącie AKLD można opisać okrąg, stąd $\sphericalangle DLK = \sphericalangle DAK = 90°$. Zatem ΔDKL jest równoramienny w którym $DK = \sqrt{AK^2 + AD^2} = 10$. Ost. $P_{DKL} = 25$

7



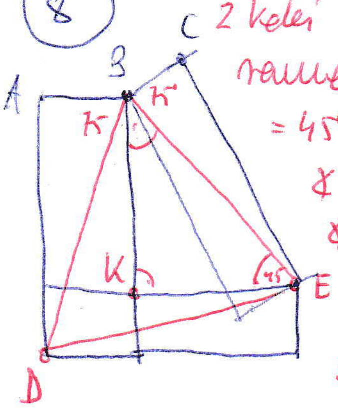
Niech $E \in BC$ i $AC = CE$. $\Delta ADC = \Delta DEC \Rightarrow AD = DE = EB$. $\sphericalangle DEC = 76° \Rightarrow \varphi = 33°$

10



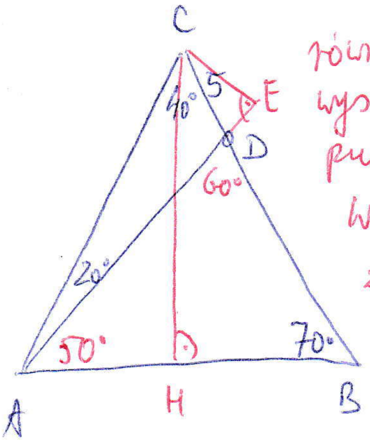
Zakreskowany trójkąt stanowi połowę pola każdego z 2 prostokątów. □

8



trójkąt DEB jest równoboczny. Z kolei ΔBKE jest równoramienny i $\sphericalangle KEB = \sphericalangle KBE = 45°$. Dalej $\sphericalangle DEK = \sphericalangle ADB = 15°$ stąd $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBE = 75°$. Ostatecznie $\sphericalangle ABC = 150°$

9

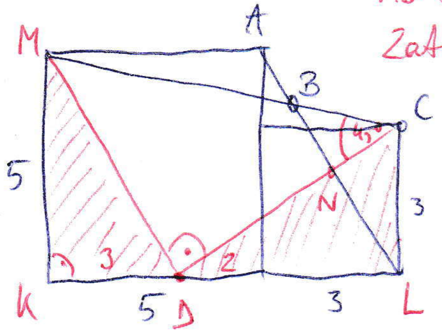


Zauważmy że ΔABC jest równoramienny. Niech CH będzie wysokością. Przedłużmy AD do punktu E tak że $\sphericalangle AEC = 90°$. W ΔABD mamy $\sphericalangle DAB = 50°$ i $\sphericalangle ADB = 60°$. Stąd ΔDEC jest ekierkowym w którym $DE = \frac{5}{2}$. Zauważmy teraz że $\Delta AHC = \Delta AEC$ stąd $AH = CE = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

Ostatecznie $AB = 2\cdot AH = 5\sqrt{3}$

11

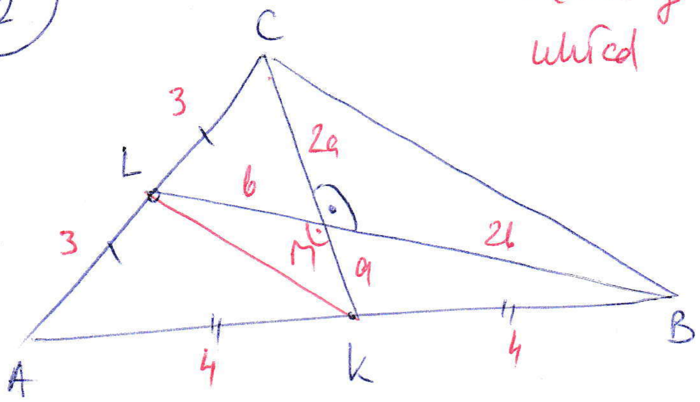
Niech $KD=3 \Rightarrow \Delta KDM = \Delta DLC$



$MD=DC$ oraz $\sphericalangle MDC = 90°$

Zatem $\sphericalangle 45°$. Zauważmy że $\sphericalangle ABC$ jest zewnętrzny dla ΔBNC, ale $MD \parallel AL$ zatem $\sphericalangle ABC = 45° + 90° = 135°$

12



Oznaczmy $KM=a$, $LM=b$. Wówczas otrzymujemy układ

$$\begin{cases} b^2+4a^2=9 \\ 4b^2+a^2=16 \end{cases} \Rightarrow 5(a^2+b^2)=25 \Rightarrow a^2+b^2=5 \quad (*)$$

$\Rightarrow LK=\sqrt{5}$ i $BC=2\sqrt{5}$.

Ze wzoru Herona $P_{ABC}=4\sqrt{11}$

Z $(*)$ wynika $5-a^2+4a^2=9 \Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $b=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$, stąd $ab=\frac{2}{3}\sqrt{11}$. $P_{LKBC}=\frac{1}{2}(ab+4ab+2ab+2ab)=3\sqrt{11}$.

(bez Herona)

$\Delta AKL \sim \Delta ABC$ w skali $1:2 \Rightarrow P_{ABC}=4\cdot P_{AKL}=P_{AKL}+P_{LKBC} \Rightarrow P_{AKL}=\sqrt{11} \Rightarrow P_{ABC}=4\sqrt{11}$.