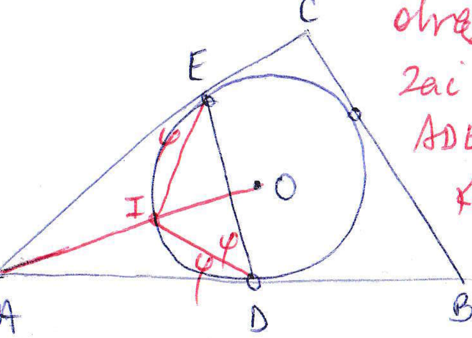
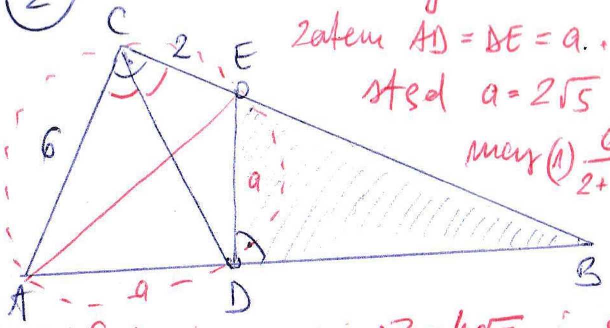
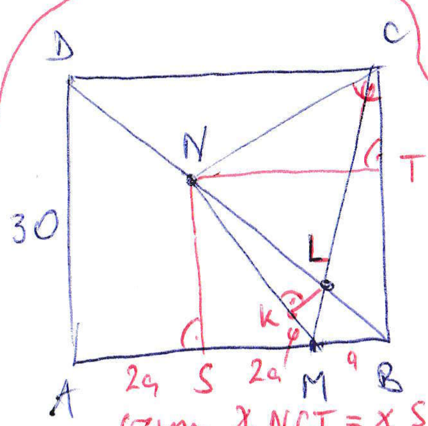
① 

Niech dwusieczna AO przecina okrąg w punkcie I. Trzeba wykazać że ID jest dwusieczną kąta ADE. Oznaczmy $\measuredangle ADI = \varphi$. Wówczas $\measuredangle AEI = \varphi$. Kąt AEI jest dopisany stąd $\measuredangle AEI = \measuredangle IDE = \varphi$. Stąd teza.

② 

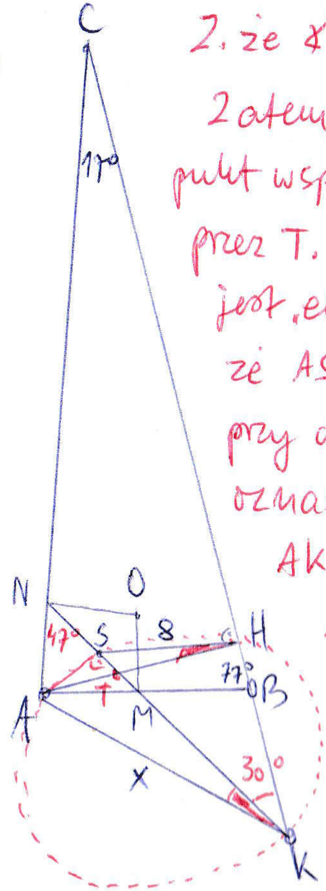
Zauważmy że na ADEC można opisać okrąg ($C+D=180$). Zatem $AD = DE = a$. Z tw. Pitagorasa $AE = 2\sqrt{10}$ stąd $a = 2\sqrt{5}$. Z tw. o dwusiecznej kąta wew. mamy (1) $\frac{6}{2+EB} = \frac{2\sqrt{5}}{DB}$ oraz z tw. Pit. w ΔEDB (2) $EB^2 = DB^2 + 20$. Rozwiązując układ otrzymujemy $DB = 4\sqrt{5}$ i $S_{EBD} = 20$.

③ 

Oznaczmy $MB = a$. Wówczas $AM = 4a$ i $AB = 5a$. Z tw. Talesa mamy $\frac{DN}{NB} = \frac{AS}{5a-AS}$. Stąd $AS = 2a$ i $SM = 2a$. Dalej $CT = 2a$ i $NS = NT = 3a$ stąd $\Delta NSM = \Delta NTC$ przy czym $\measuredangle NCT = \measuredangle SMN = \varphi$, zatem MBCN wpisany.

Niech S i T będą rzutami punktu N na boki AB i BC.

Dalej $\measuredangle NBC = \measuredangle NMC = 45°$. Zatem trójkąt KML jest równoramienny i $KL = KM$. Z tw. Pitagorasa w ΔMBC mamy $MC = 6\sqrt{26}$. Zauważmy że $\Delta MBL \sim \Delta DLC$ w skali $k = \frac{1}{5}$, stąd $ML = \frac{1}{5} CL \Rightarrow ML = \frac{1}{6} MC = \sqrt{26}$. Ostatecznie $KL = \sqrt{13}$.

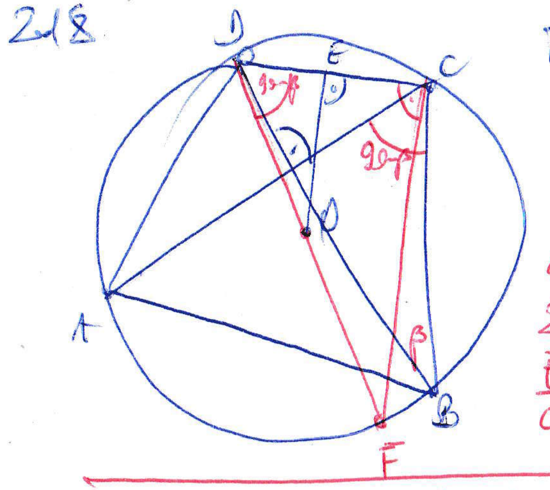
④ 

Z. że $\measuredangle A = 86°$ stąd $\measuredangle ANK = 47°$; zatem $\measuredangle NKC = 30°$. Oznaczmy punkt wspólny wysokości AH i MN przez T. Wówczas trójkąt TKH jest „ekierkowy". Zauważmy dalej że $AS \perp MN$ i $\Delta AST \sim \Delta TKH$ przy czym $\measuredangle SAT = \measuredangle TKH = 30°$ co oznacza że na czworokącie AKHS można opisać okrąg, zatem $\measuredangle AHS = \measuredangle AKS$ i mamy $\Delta SHT \sim \Delta AKT$. Otrzymujemy proporcje

$$\frac{x}{8} = \frac{AT}{ST} = \frac{TK}{TH} = 2$$

ostatecznie $AK = 16$.

Zad 8.



T: $OE = \frac{1}{2}AB$

Niech DF średnica.

Wystarczy wykazać że $CF = AB$

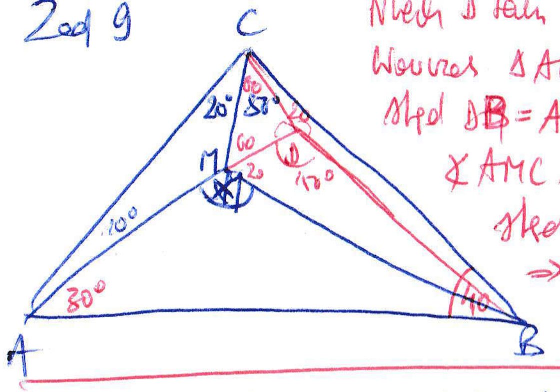
Niech $\sphericalangle DBC = \beta \Rightarrow \sphericalangle ACB = 90-\beta$

ale $\sphericalangle DFC = \beta$ (ten sam łuk DC) $\Rightarrow \sphericalangle FDC = \beta$

Zatem $AB = FC$ i dalej z Talesa

$\frac{EO}{CF} = \frac{DO}{DF} = \frac{1}{2}$

Zad 9



Niech D taki, że ΔMDC jest równoboczny.

Wówczas $\Delta AMC = \Delta CDB$ ($AC=BC$, $MD=CD$, 20°)

Stąd $DB = AM$ oraz $\sphericalangle DMC = 10$ i $\sphericalangle CDB = 150 = \sphericalangle AMC$. Dalej $\sphericalangle MDB = 150^\circ \Rightarrow$ ~~∢DMB~~

stąd $\Delta AMC = \Delta MDB$ ($MC=MD$, $DB=AM$, 150°)

$\Rightarrow \sphericalangle MBD = 10^\circ$ i $\sphericalangle DMB = 20^\circ$ zatem

$x = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ - 20^\circ = 130^\circ$

Zad 10

T: $AM + AN = AM' + AN' \Leftrightarrow AM' - AM = AN - AN' \Leftrightarrow$

$MM' = N'N$. W czworokącie wpisanym

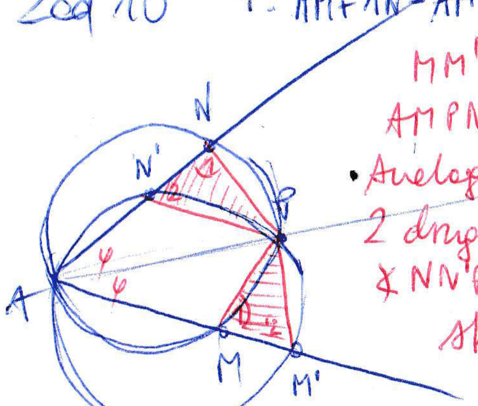
$AMPN$ mamy $PM = PN$ (łuki opisane równe)

Analogicznie w czw. $AM'PN'$ mamy $PM' = PN'$

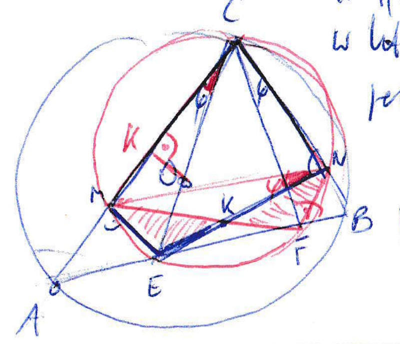
Z drugiej strony $\sphericalangle PMM' \overset{(1)}{=} \sphericalangle NN'P$ oraz

$\sphericalangle NN'P \overset{(2)}{=} \sphericalangle MM'P \Rightarrow \sphericalangle MPM' = \sphericalangle N'PN$

Stąd $\Delta MM'P = \Delta N'PN \Rightarrow$ teza.



Zad 5



Wystarczy wykazać że

$MN \parallel AB$ i mamy wtedy trapez $MEFN$

w którym $S_{MEK} = S_{KFN}$. Czworokąt $CMKN$

jest wspólną częścią obu czworokątów

chyba.

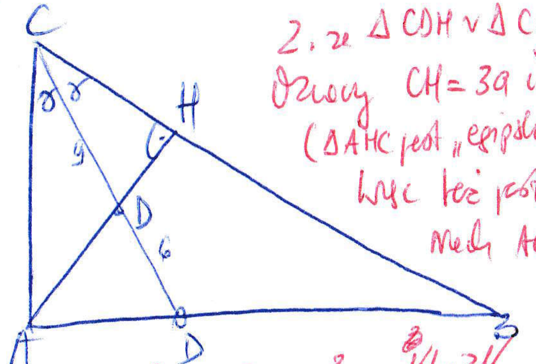
Na $CMEN$ można opisać okrąg

Niech K środek AC wówczas $\sphericalangle KOC = \beta$

stąd $\Delta KOC \sim \Delta CFB \Rightarrow \sphericalangle CFB = 90^\circ$

ale $\sphericalangle ENB = 90^\circ \Rightarrow \Delta EBN \sim \Delta CFB \Rightarrow \sphericalangle NEB = \varphi \Rightarrow MN \parallel AB$.

Zad 6



Z, że $\Delta CDH \sim \Delta CAD$ w skali $k = \frac{9}{15} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{5}$.

Oznaczmy $CH = 3a$ i $CA = 5a$ wówczas $AH = 4a$

(ΔAHC jest „egipski"). Dalej $\Delta ABC \sim \Delta AHC$

więc też jest „egipski" w którym

Niech $AC = 3b$, $AB = 4b$ i $BC = 5b$.

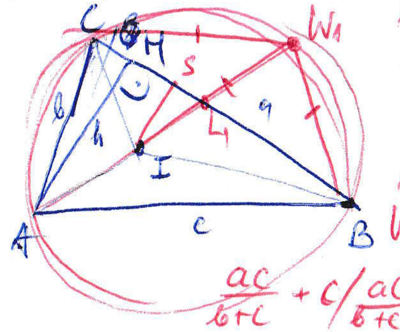
Z tw. o dwusiecznej

Mamy $225 = \cancel{9b^2+25b^2}\ 15b^2 - \frac{4b\cdot 3b}{8b}\cdot\frac{4b\cdot 5b}{8b} \Rightarrow$

$225 = 15b^2 - \frac{15}{4}b^2 \Rightarrow 15 = \frac{3}{4}b^2 \Rightarrow b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$

Odp. $AC = 6\sqrt{5}$, $AB = 8\sqrt{5}$ i $S_{ABC} = 120$

Zad 7 Niech $AC < BC < AB$ i wtedy $a = \frac{b+c}{2} \Rightarrow \boxed{2a = b+c}$



$CW_1 = IW_1 = W_1B$. Z tw. Ptolemeusza mamy

$AW_1 \cdot BC = CW_1 \cdot AB + W_1B \cdot AC \Rightarrow$

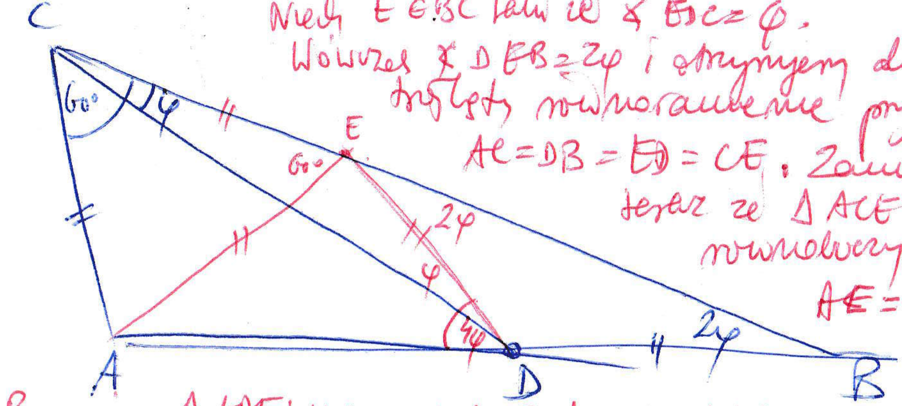
$AW_1 \cdot a = IW_1(b+c) \Rightarrow \frac{AW_1}{IW_1} = \frac{b+c}{a} = 2$

Stąd I jest środkiem AW_1. Niech $IS \perp BC$

Wówczas $\frac{AH}{IS} = \frac{h}{r} = \frac{AL_1}{IL_1} = \frac{AL_1}{AL_1 \cdot BL_1} = \frac{BL_1 + C}{BL_1} =$

$\frac{\frac{ac}{b+c} + c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{ac + c(b+c)}{ac} = 3$ Odp. $r = \frac{1}{3}h$

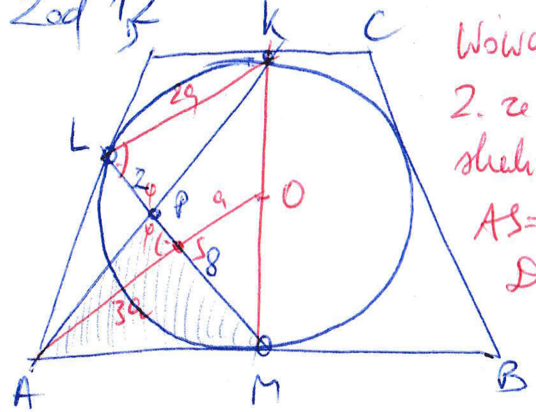
Zad 11



Niech $E \in BC$ takie że $\sphericalangle EDC = \varphi$. Wówczas $\sphericalangle DEB = 2\varphi$ i otrzymujemy dwa trójkąty równoramienne przy czym $AC = DB = ED = CE$. Zauważmy teraz że ΔACE jest równoboczny stąd $AE = ED$

Rozważmy ΔADE: mamy $\sphericalangle ADE = 4\varphi \Rightarrow \sphericalangle AED = 180 - 4\varphi$ i dalej $180° - 4\varphi = 180° - 60° - 2\varphi \Rightarrow 60° = 6\varphi \Rightarrow \varphi = 10°$

Zad 12



Niech KM średnica. Oznaczmy $AO \cap LM = S$.
Wówczas $SM = \frac{1}{2} ML = 5 \Rightarrow PS = 3$.
2. ze $\Delta LPK \sim \Delta ASP$ $(90°, \varphi)$ w skali $k = \frac{2}{3}$. Oznaczmy $LK = 2a$ wówczas $AS = 3a$ oraz z TI w ΔLMK $SO = a$
Dalej z tw. Pitagorasa w ΔAMO mamy $25 = 3a^2$ stąd $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ i ost.

$S_{AMO} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$