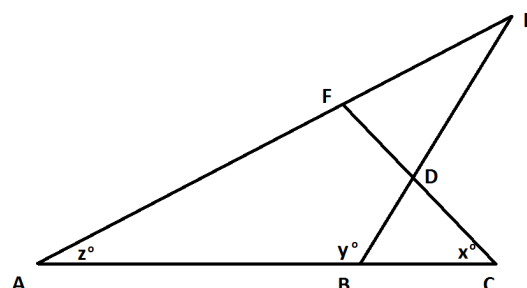


PONADREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY

poziom: szkoła podstawowa

1 czerwca 2016 r.

- Podczas gry w pokera podsłuchano rozmowę czterech króli:
król Kier: Schowałem wszystkie jokery.
król Trefl: Król Kier kłamie.
król Karo: Król Trefl kłamie.
król Pik: Król Karo kłamie.
Ilu króli skłamało?
- Czworokąt $ABCD$ podzielono przekątną AC na dwa trójkąty równoramienne. Jeden z nich ma kąty 80° , 80° i 20° , a drugi ma kąty 40° , 40° i 100° . Jakie kąty mógł mieć czworokąt $ABCD$?
- Jaś powiedział do Małgosi: pomyśl dwie liczby i podaj mi najpierw ich sumę a potem dodatnią różnicę, a ja powiem ci, jaki jest ich iloczyn. Małgosia powiedziała najpierw 7 a potem 2. Jaki iloczyn podał Jaś?
- Wydawca dwustustronicowej książki "Wszystkie tajemnice okręgu" w celu uhonorowania głównego bohatera zamierza wydrukować numery stron w specjalny sposób. Otóż każda cyfra 0 będzie miała kolor czerwony, a pozostałe cyfry - kolor niebieski. Ile cyfr każdego z kolorów pojawi się w numeracji stron?
- Liczba palindromiczna nie zmienia wartości czytana w przód i wstecz. Jaka jest różnica między największą i najmniejszą pięciocyfrową liczbą palindromiczną, które są wielokrotnościami 45?
- Ile jest trójkątów równoramiennych, których wierzchołkami są wierzchołki dwunastokąta foremnego?
- Paulina ma tyle samo braci co siostr. Każdy z jej braci ma o 50% więcej siostr niż braci. Ile jest dzieci w tej rodzinie?
- W ciemnym pokoju Zosia szuka rękawiczek. Wie, że w szufladzie jest 7 jednakowych par rękawiczek czarnych, 3 jednakowe pary zielonych i 4 białych. Ile rękawiczek powinna Zosia wynieść do jasnego pokoju, aby mieć pewność, że wśród nich znajdzie się chociaż jedna para rękawiczek jednego koloru? Jaka będzie odpowiedź, jeżeli rękawiczki zastąpimy skarpetkami?
- Marek znalazł w sali od matematyki tajemnicze urządzenie przypominające kalkulator; urządzenie było jednak wyposażone jedynie w klawisze z cyframi, klawisz $*$ oraz wyświetlacz. Po kilku próbach Marek zorientował się, że po wpisaniu liczby oraz wciśnięciu $*$ liczba nieparzysta była powiększana o 5, zaś parzysta była dzielona przez 2. Po wpisaniu pewnej liczby Marek dwa razy nacisnął klawisz $*$ i na wyświetlaczu pojawiła się liczba 18. Jaką liczbę Marek wpisał na początku?
- Rozważmy figurę, jak na rysunku. Wiedząc, że $|EF| = |ED|$, wylicz x za pomocą y i z .



ROZWIĄZANIA

1. Rozpatrzmy 2 przypadki. Jeśli Kier kłamał, to Trefl mówił prawdę, Karo kłamał i Pik mówił prawdę. Jeśli Kier mówił prawdę, to Trefl kłamał, Karo mówił prawdę i Pik kłamał. Innych możliwości nie ma. Zawsze kłamało dwóch.

OCENA. Dobra odpowiedź, bez uzasadnienia 2 pkt. Jeśli uzasadnienie jest nieprecyzyjne – do 6 pkt. Za brak wyraźnego stwierdzenia, że rozpatrzono wszystkie możliwe przypadki 8 pkt.

2. Należy rozważyć wszystkie możliwości złożenia razem dwóch opisanych trójkątów, a jest ich pięć. Spośród nich dwie możliwości należy odrzucić, gdyż jeden z kątów czworokąta miałby 180 stopni. Pozostałe trzy możliwości dają:

$20^\circ, 120^\circ, 100^\circ, 120^\circ,$
 $80^\circ, 120^\circ, 100^\circ, 60^\circ,$
 $80^\circ, 120^\circ, 40^\circ, 120^\circ.$

OCENA. Nierozważenie którejs z możliwości: do 6 pkt. Niewykluczenie możliwości dających kąt 180 stopni: minus 3 punkty.

3. Niech pomyślane liczby to A i B , przy czym $A > B$. Wiemy, że $A + B = 7$ i $A - B = 2$. Dodając stronami, mamy $2A = 9$, czyli $A = 9/2 = 4,5$. Stąd $B = 7 - 4,5 = 2,5$. Jaś podał liczbę $4,5 \cdot 2,5 = 11,25$.

OCENA. Za każdy błąd rachunkowy odjąć 2 pkt.

4. Do ponumerowania wszystkich dwustu stron potrzeba $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 101 \cdot 3 = 493$ cyfry. Wśród nich zero pojawi się $9 + 2 + 9 + 9 + 2 = 31$ razy. Zatem w książce będzie 31 czerwonych cyfr oraz 462 niebieskie.

OCENA. Każda pomyłka rachunkowa 3 punkty mniej.

5. $45 = 9 \cdot 5$, czynniki względnie pierwsze, więc podzielność przez 45 jest równoważna podzielności przez 9 i 5, a to jest równoważne koniunkcji warunków: ostatnia cyfra to 0 lub 5, suma cyfr podzielna przez 9. Liczba palindromiczna nie może zaczynać się zerem, zatem I i V cyfra to 5. Aby otrzymać wartości ekstremalne II i IV cyfra musi być 9 w odjemnej i 0 w odjemniku. Mamy zatem 59?95 i 50?05. Aby zachodziła podzielność przez 9, do sumy 10 trzeba dobrać środkową cyfrę i to jest 8. Odpowiedź 59895–50805 = 9090.

OCENA. Za brak względnej pierwszości 9 i 5 odjąć 2 pkt. Za błędną implikację w podzielności odjąć 2.

6. Nazwijmy "boczkami" każdy z boków dwunastokąta. Każdy trójkąt, o którym mowa w treści zadania, jest jednoznacznie wyznaczony przez "drogę" składającą się z kolejnych boczków, zaczynającą się i kończącą w końcach podstawy trójkąta oraz przechodzącą przez trzeci wierzchołek trójkąta, jeżeli trójkąt nie jest równoboczny. Oczywiście droga musi zawierać przystającą liczbę boczków. Dróg składających się z 2, 4, 6, 10 boczków jest po 12, czyli razem 48. Natomiast droga składająca się z 8 boczków odpowiada trójkątowi równobocznemu. Szukanych trójkątów równobocznych jest 4, co łatwo policzyć. Odpowiedzią jest 52.

OCENA. Sama odpowiedź: 4 punkty. Błędne policzenie któregoś rodzaju trójkątów: do 6 punktów.

7. Niech C to liczba chłopców, a D – dziewczynek. Wiadomo, że $C = D - 1$, bo Paulina ma C braci i $D - 1$ sióstr. Ponadto $D = (C - 1) + \frac{1}{2}(C - 1) = \frac{3}{2}(C - 1)$, bo brat ma $C - 1$ braci i D sióstr, a sióstr jest o 50% więcej. Stąd $C + 1 = \frac{2}{3}(C - 1)$, czyli $2C + 2 = 3C - 3$, czyli $C = 5$ i $D = 6$.

OCENA. Odpowiedź bez uzasadnienia, ze sprawdzeniem, że spełnia warunki zadania 3 pkt. Zapisanie symboliczne warunków zadania 2 pkt.

8. Jeżeli Zosia wyniesie nawet 14 rękawiczek, to mogą być wszystkie np. lewe. Zatem dopiero 15 jest wystarczającą liczbą. Nie ma skarpetek lewych i prawych. Ponieważ są 3 kolory to wystarczy, że Zosia wyniesie 4 skarpetki.

OCENA. Za rozwiązanie tylko połowy zadania (same rękawiczki lub same skarpetki): 5 pkt. Za dobre odpowiedzi, ale brak uzasadnienia: do 4 punktów.

9. Zauważmy, że wynik 18 mógł się pojawić albo po podzieleniu pewnej liczby (czyli 36) przez 2 albo poprzez dodanie liczby 5 do pewnej liczby nieparzystej (czyli do 13). Poprzednią liczbą było więc 36 lub 13. Jeżeli poprzednią liczbą było 36, to mogliśmy ją uzyskać albo po wpisaniu 72 i naciśnięciu *, albo po wpisaniu 31 i naciśnięciu *. Z kolei jeśli poprzednią liczbą było 13 to mogliśmy ją uzyskać jedynie z liczby 26 (ponieważ po dodaniu 5 do liczby nieparzystej nie otrzymalibyśmy liczby 13). Czyli Marek mógł wpisać na początku jedną z liczb 72, 31 lub 26.

OCENA. Pominięcie choć jednego przypadku: do 5 punktów.

10. $|\angle EFD| = x + z$, bo to kąt zewnętrzny w trójkącie ACF . Analogicznie $y = |\angle CDB| + x$, czyli $|\angle CDB| = y - x$. Te kąty są przystające (podstawa trójkąta równoramiennego i kąty wierzchołkowe). Zatem $x + z = y - x$, czyli $2x = y - z$, skąd $x = \frac{1}{2}(y - z)$.

OCENA. Za podanie związku między miarami kątów, ale bez uzasadnień: 4 pkt.